تصحيح نموذجي للاختبار الدورة العادية تحليل 03

تمرين 01 (6 نقاط) تحديد طبيعة سلاسل عددية

$\sum_{n\geq 1} \sqrt{n^2+1}-n$. نضع $u_n = \sqrt{n^2+1}-n$

نلاحظ أن $u_n > 0$.

$$u_n = \frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}$$

$$\frac{u_n}{\frac{1}{n}} = n.u_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$ إذا:

ومنه: $u_n \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

أي أن $\sum u_n$ ، $\sum \frac{1}{n}$ لهما نفس الطبيعة حسب معيار التكافؤ. وبما أن $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ هي السلسلة التوافقية فهي متباعدة ومنه $\sum_{n\geq 1} u_n$ سلسلة متباعدة.

$\sum_{n\geq 0} \frac{e^n-2}{\pi^n}$. نلاحظ أنه

$\forall n \geq 1$, $u_n = \frac{e^n-2}{\pi^n} > 0$

وكذلك: $u_n < \left(\frac{e}{\pi}\right)^n$.

لكن $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n$ سلسلة هندسية متقاربة $-1 < \frac{e}{\pi} < 1$

إذا حسب معيار المقارنة $\sum_{n\geq 0} u_n$ متقاربة.

$\sum_{n\geq 2} \frac{2^{n+1}.n^3}{5^n}$. نلاحظ:

$u_n = \frac{2^{n+1}.n^3}{5^n} > 0$, $(\forall n \geq 2)$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+2}(n+1)^3}{5^{n+1}} \times \frac{5^n}{2^{n+1}.n^3}$$

$$= \frac{2}{5}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \longrightarrow \frac{2}{5} < 1$$

حسب معيار دالامبير فالسلسلة متقاربة.

صفحة 1

تمرين 03 (4 نقاط) تحليل الطبيعة

$\sum_{n\geq 1} \frac{n+(-1)^n}{1+n\sqrt{n}}$.

نكتب: $u_n = \frac{n}{1+n\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{1+n\sqrt{n}}$

لدينا: $\frac{n}{1+n\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$

وبما أن $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ سلسلة ريمان متباعدة $(\frac{1}{2}<1)$

إذا $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{1+n\sqrt{n}}$ متباعدة.

$v_n = (-1)^n \frac{1}{1+n\sqrt{n}} = (-1)^n . a_n$

نلاحظ أن $a_n > 0$ ، و a_n متناقصة (أثبت ذلك)

و $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ حسب معيار لايبنتز فإن $\sum_{n\geq 1} v_n$ متباعدة.

نتيجة: $\sum_{n\geq 1} \frac{n+(-1)^n}{1+n\sqrt{n}}$ متباعدة (نكون سلسلتين إحداهما متقاربة والأخرى متباعدة)

$\sum_{n\geq 0} \ln\left(\frac{n^2+6n+5}{n^2+5n+6}\right)$.

$$\frac{n^2+6n+5}{n^2+5n+6} = \frac{n^2+5n+6+n-1}{n^2+5n+6}$$

$$= 1 + \frac{n-1}{n^2+5n+6}$$

إذا: $\ln\left(\frac{n^2+6n+5}{n^2+5n+6}\right) \overset{\infty}{\sim} \frac{n-1}{n^2+5n+6}$

و $\frac{n-1}{n^2+5n+6} \overset{\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

وبما أن $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة فإن السلسلة المعطاة متباعدة كذلك.

(2 نقاط) $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{e^n-2}{\pi^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi}\right)^n$

$$= \frac{1}{1-\frac{e}{\pi}} - \frac{2}{1-\frac{1}{\pi}} = \frac{\pi}{\pi-e} - \frac{2\pi}{\pi-1}$$

(مجاميع سلاسل هندسية متقاربة لأن $\frac{1}{\pi}<1$ ؛ $\frac{e}{\pi}<1$)

② تمرين

$0 \leq f(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2} < \frac{t}{t^4} = \frac{1}{t^3}$ $t \geq 0$ لدينا من أجل كل

وبما أن $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3}$ متقاربة (تكامل ريمان $\alpha > 1$ - $\alpha = 3$) فإنه حسب معيار

المقارنة: $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ متقاربة كذلك.

حساب قيمته: f دالة قابلة للمكاملة محليا على $[0, +\infty[$ وعليه فإنه:

$$\int_0^A \frac{t}{(1+t^2)^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^A 2t(1+t^2)^{-2} dt = \frac{1}{2} \int_0^A (1+t^2)^{-2} (1+t^2)' dt$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+t^2} \Big|_0^A = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+A^2} - 1 \right] \xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{1}{2} = \int_0^{+\infty} f(t)dt$$

استنتاج: بنفس الطريقة نجد

$$\int_\lambda^0 f(t)dt = -\frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{1+\lambda^2} \right] \xrightarrow[\lambda \to -\infty]{} -\frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

③ (1) نضع $a_n = \frac{n}{5^n}$ يمكن بسهولة ملاحظة أن f دالة فردية.

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n} = \frac{1}{5} = l \quad R = \frac{1}{l} = 5 : \text{نجد}$$

$D =]-5, 5[$ ،

من أجل $x = -5$ نجد $\sum_{n \geq 0} (-1)^n n$ متباعدة

من أجل $x = 5$ نجد $\sum_{n \geq 0} n$ متباعدة

(2) لدينا:

$$\frac{n}{(1+e^{-x})^n} = \frac{n}{5^n} \cdot \left(\frac{5}{1+e^{-x}} \right)^n$$

بدراسة تغيرات الدالة $x \longmapsto \frac{5}{1+e^{-x}}$ نجد: $0 < \frac{5}{1+e^{-x}} < 5$

ومنه $\sum \frac{n}{(1+e^{-x})^n}$ متقاربة بسيطا على $\mathbb{R}$.

(4) $f^{(5)}(0) = a_5 \cdot 5! = \frac{5}{5^5} \cdot 5! = \frac{5!}{5^4}$

$a_5 = \frac{f^5(0)}{5!} \Rightarrow$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{5^n} \cdot x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{5^n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{5} \right)^n$$

$$= x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{5} \right)^n \right)' = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{5} \right)^n - 1 \right)'$$

$$= x \left(\frac{1}{1 - \frac{x}{5}} - 1 \right)' = x \left(\frac{5 - 5 + x}{5 - x} \right)' = x \left(\right.$$

$$= x \cdot \frac{5}{(5-x)^2} = \frac{5x}{(5-x)^2}$$

3 مثال

① استناداً نتيجة المجاميع

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{5^n} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n = f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{5 \cdot \frac{5}{3}}{\left(5-\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}$$

$$-5 < \frac{5}{3} < 5 \quad \text{لأن}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{5^n} = f(-1) = \frac{5(-1)}{(5+1)^2} = \frac{-5}{36}$$

$$-5 < -1 < 5 \quad \text{لأن}$$