جامعة الشهيد حمّه لخضر بالوادي
كليّة العلوم الدقيقة
قسم الرياضيات

السنة الجامعية: 2026/2025
المستوى: ثالثة رياضيات

التصحيح النموذجي لامتحان الدورة العاديّة لمقياس المعادلات التفاضلية

المدّة: ساعة ونصف

أجب بكتابة أهم الخطوات على التمارين التالية.

التمرين الأول: (6 ن)

I – لتكن المسألة:

$$\begin{cases} y' = x\left(\sin^2(x) + y^2\cos^2(x)\right) \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots (CP_1)$$

1. أثبت أنّ (CP_1) تقبل حلاً وحيداً φ شاملا من الصنف C^∞. (04)

$f(x,y) = x\left(\sin^2(x) + y^2\cos^2(x)\right)$

f مستمرة بالنسبة لـ x (عمليات على نوابع مستمرة)

f يحقق شرط ليبشيتز محليا بالنسبة لـ y،

$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = \left|2xy\cos^2(x)\right| \leqslant K$ لأن محليا، (01)

حسب نظرية كوشي ليبشتز (CP_1) تقبل حلا وحيدا معرفا على مجال مفتوح $I=]-a,a[$ (0,5)

و بما أن f من الصنف $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ فإن الحل من الصنف $C^\infty(I)$ (0,5)

حسب الصيغة التكاملية لـ (CP_1)

$\varphi(x) = \int_0^x s\left(\sin^2(s) + \varphi^2(s)\cos^2(s)\right)ds$

نلاحظ أن لو كان $I=\mathbb{R}$ أي أن $a=+\infty$

لكان $\varphi(x) + \varphi(-x) = 0$ (01)

معناه أن $\varphi(-x)$ و $\varphi(x)$ مختلفين في الاشارة وهذا تناقض لأن الحل موجب، وبالتالي $a \neq +\infty$ أي أن $I=\mathbb{R}$

2. أدرس اتجاه تغير φ على $\mathbb{R}$.

بما أن $\varphi'(x) = x\left(\sin^2 x + \varphi^2(x)\cos^2(x)\right) \geqslant 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

إشارة φ' من إشارة x

$x \leqslant 0 \Leftarrow \varphi$ متناقص (0,5)

$x \geqslant 0 \Leftarrow \varphi$ متزايد

3. استنتج أنّ φ يقبل قيمه حدّية محليّة صغرى عند $x = 0$.

منحنى φ تناقصي وتزايدي

إشارتها $\Leftarrow$ φ يقبل قيمة حدية محلية صغرى عند $x=0$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\varphi(x) \geqslant 0$ أي أن (0,5)

(الحل موجب).

II – هل يمكن تطبيق نظريّة الوجود و الوحدانيّة على المسألة: (07)

$$\begin{cases} y' = x\sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots (CP_2)$$

أجب بدقة واختصار مبرر اجابتك.

نلاحظ أن المسألة تقبل حلين (0,5)

$u(x) = 0$ ، $v(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)^3$ حلين معينين

أي أن شرط الوحدانية غير محقق لأن

$f(x,y) = x\sqrt[3]{y}$ لا يحقق شرط ليبشتز عند $(0,0)$ (0,5)

محليا

$\forall x \in]-a,a[\quad \forall y_1, y_2 \in]-b,b[$ $a>0$ $b>0$

$\left|x\sqrt[3]{y_1} - x\sqrt[3]{y_2}\right| = x\left|\sqrt[3]{y_1} - \sqrt[3]{y_2}\right| \leqslant K$

نفرض بالخلف أنه يحقق شرط ليبشتز محليا عند $(0,0)$

$x\left|\sqrt[3]{y_1} - \sqrt[3]{y_2}\right| = x\,g(c)\left|y_1 - y_2\right|$ (01)

$x = a$

$y_1 = b$

$y_2 = 0$

$= \frac{ab}{3c^{2/3}} \longrightarrow +\infty$ $c \to 0$

$-b < c < b$

$b \to 0$

$c \to 0$

نظرية التزايدات المنتهية

تناقض

ومنه التابع $f(x,y) = x\sqrt[3]{y}$ لا يحقق شرط ليبشتز محليا عند $(0,0)$

التمرين الثاني: (10 ن)

لتكن الجملة التفاضلية:

$$(S)\cdots\cdots\begin{cases} t\dfrac{dx}{dt}+x+2y=\ln t \\ t\dfrac{dy}{dt}-3x-4y=0 \end{cases}$$

3,5

I – مستعملا طريقة المعادلة الحالة حل الجملة (S).

المعادلة الحالة بالنسبة لـ X

$$t^2\ddot{X}-2t\dot{X}+2X=1-4\ln t$$ (0,1)

$X=X_h+X_p$ (0,25)

المتجانسة معادلة كوشي أولر

$X_h=C_1t+C_2t^2$ (0,5)

حساب X_p بطريقة تغيير الثوابت

$X_p(t)=C_1(t)t+C_2(t)t^2$ (0,25)

حيث C_1 ، C_2 حل الجملة:

$$\begin{cases} \dot{C}_1t+\dot{C}_2t^2=0 \\ \dot{C}_1+2\dot{C}_2t=\dfrac{1-4\ln t}{t^2} \end{cases}$$ (0,25)

$$\dot{C}_1=\frac{\begin{vmatrix} 0 & t^2 \\ \frac{1-4\ln t}{t^2} & 2t \end{vmatrix}}{t^2}=\frac{-1+4\ln t}{t^2}$$ (0,25)

$$\dot{C}_2=\frac{\begin{vmatrix} t & 0 \\ 1 & \frac{1-4\ln t}{t^2} \end{vmatrix}}{t^2}=\frac{1-4\ln t}{t^3}$$

بعد الحساب نجد

$$C_1(t)=\frac{-4\ln t}{t}-\frac{3}{t}$$

$$C_2(t)=\frac{2\ln t}{t^2}+\frac{1}{2t^2}$$ (0,5)

ومنه

$$X_p(t)=-2\ln t-\frac{5}{2}$$ (0,25)

ومنه $X(t)=C_1t+C_2t^2-2\ln t-\frac{5}{2}$ (0,25)

بالتعويض في المعادلة (1) نجد

$$Y(t)=\frac{1}{2}\left[-t\dot{X}-X+\ln t\right]$$ (0,25)

بعد الحساب نجد

$$Y(t)=-C_1t-\frac{3}{2}C_2t^2+\frac{3}{2}\ln t+\frac{9}{4}$$ (0,25)

كما يمكن اعتماد أي طريقة أخرى صحيحة في حل معادلة كوشي أولر.

II – لتكن المصفوفة : $\phi(t)=\begin{pmatrix}-t & 2t^2\\ t & -3t^2\end{pmatrix}$

1. أكتب (S) على الشكل المصفوفي

$$Y'=A(t)Y+B(t)$$

2 ن

$$A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{t} & -\frac{2}{t}\\ \frac{3}{t} & \frac{4}{t}\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}\frac{\ln t}{t}\\ 0\end{pmatrix}$$

0,5

2. تحقق أنّ $\phi(t)$ مصفوفة أساسيّة للجملة (S_0) المتجانسة المرفقة بـ (S) ثم أوجد الحلّ العام لها.

(أجب باختصار)

أي أن : $\phi'=A\phi$ 0,5

و $\det\phi=t^3\neq 0 \quad \forall t>0$ 0,5

$$Y_h(t)=\phi(t)\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}$$ 0,25

$$Y_h(t)=\begin{pmatrix}-C_1t+2C_2t^2\\ C_1t-3t^2C_2\end{pmatrix}$$ 0,25

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

3. عيّن حلّا خاصا لـ (S) ثمّ الحلّ العام لها. 2,5

$Y_p(t)=\phi(t)C(t)$ 0,25

بالاستعانة بطريقة تغيير الثوابت في (S)

$C'(t)=\phi^{-1}(t)B(t)$ 0,25

$\phi^{-1}=\frac{1}{t^3}(\phi)^t=\begin{pmatrix}-\frac{3}{t} & -\frac{2}{t}\\ -\frac{1}{t^2} & -\frac{1}{t^2}\end{pmatrix}$ 0,5

$C'(t)=\begin{pmatrix}-\frac{3\ln t}{t^2}\\ -\frac{\ln t}{t^3}\end{pmatrix}\Rightarrow C(t)=\begin{pmatrix}\frac{3\ln t}{t}+\frac{3}{t}\\ \frac{\ln t}{2t^2}+\frac{1}{4t^2}\end{pmatrix}$ 0,5 0,5

ومنه

$$Y_p(t)=\begin{pmatrix}-2\ln t-\frac{5}{2}\\ \frac{3}{2}\ln t+\frac{9}{4}\end{pmatrix}$$

$Y_G(t)=Y_h(t)+Y_p(t)$ 0,25

$$Y_G(t)=\begin{pmatrix}-C_1t+2C_2t^2-2\ln t-\frac{5}{2}\\ C_1t-3t^2C_2+\frac{3}{2}\ln t+\frac{9}{4}\end{pmatrix}$$ 0,25

التمرين الثالث: (4 ن)

أدرس استقرار الحل المعدوم $(x,y)=(0,0)$ للجملة:

$$(S_\alpha)\cdots\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-2\alpha y-x\end{cases}$$

التفاضليّة:

(أجب باختصار)

$(S_\alpha)\Leftrightarrow \dot{Y}(t)=\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\-1&-2\alpha\end{pmatrix}}_{A}Y(t)$

القيم الذاتيّة لـ A:

$P_A(\lambda)=\lambda^2+2\alpha\lambda+1$

كثير حدود من الدرجة II

$\Delta=4\alpha^2-4=4(\alpha^2-1)$ (0,1)

إشارة Δ:

α	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$
Δ	$+$	0	$-$	0 $+$

(0,5)

حسب الشكّ:

ⓒ $\Delta=0 \leftarrow \alpha=\mp1 \leftarrow$ قيمة ذاتيّة مضاعفة

$\lambda_0=\dfrac{-2\alpha}{2}=-\alpha$

$\alpha=1 \leftarrow \lambda_0=-1 \leftarrow$ حل مستقرّ

$\alpha=-1 \leftarrow \lambda_0=1 \leftarrow$ حل غير مستقرّ (0,5)

ⓒ $\Delta>0 \leftarrow \alpha\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

قيمتين ذاتيّتين حقيقيّتين مختلفتين. (0,25)

$\lambda_1=-\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}$ ؛ $\lambda_2=-\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}$ (0,5)

<0

الحل مستقرّ: (0,25)

ⓒ $\Delta<0$ ؛ $\alpha\in]-1,1[$

$\Delta=4(1-\alpha^2)i^2$

حلين مركبين مترافقين

$\lambda_{1,2}=-\alpha\mp\sqrt{1-\alpha^2}\,i$ (0,5)

$\alpha\in]-1,0[$ حل غير مستقرّ

$\alpha\in[0,1[$ حل مستقرّ (0,5)

4. أوجد الحل الوحيد لـ (S) الذي يحقق: $Y(1)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

بالتعويض نجد:

$Y(1)=\begin{pmatrix}-C_1+2C_2-\frac{5}{2}\\C_1-3C_2+\frac{9}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ (0,25)

بعد الحساب نجد:

$C_1=-5$, $C_2=-\frac{5}{4}$ (0,5)

$$Y(t)=\begin{pmatrix}5t-\frac{10}{4}t^2-2\ln t-\frac{5}{2}\\-5t+\frac{15}{4}t^2+\frac{3}{2}\ln t+\frac{9}{4}\end{pmatrix}$$ (0,25)

5. هل أنّ حالّة المتجانسة المرفقة بـ (S) هي: $R(t,1)=\exp\left(\int_1^t A(s)ds\right)$ ؟ علّل إجابتك.

بما أنّ $\forall u,v>0$

$A(u)\cdot A(v)=A(v)\cdot A(u)$ (0,5)

قابليّة المبادلة

فإنّ: $R(t,1)=\exp\left(\int_1^t A(s)ds\right)$ (0,5)

كل نتيجة صحيحة غير مبررة لا تؤخذ بالحسبان

بالتوفيق و النجاح للجميع