

Ex 01 ANOVA (8)

Etape 01 = Formuler les hypothèses

Traitement	observation
T ₁	35, 37, 34, 36, 38
T ₂	42, 44, 41, 43, 45
T ₃	39, 41, 38, 40, 42

$$N = 15$$

$$K = 3 \text{ groupes}$$

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1: \exists i \neq j \text{ tel que } \mu_i \neq \mu_j$$

Etape 02 = Moyenne Intra-groupe et Moyenne Globale

1) Moyenne Intra-groupe:

$$\bar{x}_1 = \frac{35 + 37 + 34 + 36 + 38}{5} = 36$$

$$\bar{x}_2 = \frac{42 + 44 + 41 + 43 + 45}{5} = 43$$

$$\bar{x}_3 = \frac{39 + 41 + 38 + 40 + 42}{5} = 40$$

2) Moyenne Globale:

$$\bar{x} = \frac{36 + 43 + 40}{3} = 39,67$$

Etape 03 = Somme des Carrés Inter Groupe =

$$\begin{aligned} SC_{\text{inter}} &= \sum n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \\ &= 5(36 - 39,67)^2 + 5(43 - 39,67)^2 \\ &\quad + 5(40 - 39,67)^2 \end{aligned}$$

$$= 5(131,44) + 5(11,11) + 5(0,11)$$

$$SC_{\text{inter}} = 67,22 + 55,56 + 0,56$$

$$SC_{\text{inter}} = 123,34$$

Etape 4: Somme des Carrés Intra-groupe:

$$SC_B = \sum n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

$$SC_B = 5(36 - 33)^2 + 5(43 - 33)^2 + 5(40 - 33)^2 \\ = 5(9) + 5(100) + 5(49) = 45 + 500 + 245$$

$$SC_B = 130 \quad (0,5)$$

Etape 4: Degré de liberté:

1) Inter-groupe:

$$ddl_B = K - 1 = 3 - 1 = 2 \quad (0,5)$$

2) Intra-groupe:

$$ddl_E = N - K = 15 - 3 = 12 \quad (0,5)$$

Etape 5: Carrés Moyens

$$CM_B = \frac{130}{2} = 65 \quad (0,5)$$

$$CM_E = \frac{30}{2} = 15 \quad (0,5)$$

$$\text{Etape 6: } F = \frac{CM_B}{CM_E} = \frac{65}{15} = 26 \quad (0,5)$$

Etape 7: Décision:

$$\alpha = 0,05$$

$$ddl_1 = 2$$

$$ddl_2 = 12$$

$$F_{critique} \approx 3,88 \quad (0,5)$$

$$\text{Comparaison: } F_{cal} = 26 > F_{critique} = 3,88 \quad (0,5)$$

* Il existe une différence entre les moyennes de croissance des plantes, de la part du traitement d'irrigation appliquée. (0,5)

Exo 2 = ACP

1) $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ $C_1 = [1 \ 3 \ 5]^T$ $C_2 = [2 \ 0 \ 4]^T$ $C_3 = [4 \ 5 \ 6]^T$ $n = 3$

2) Centrage et Normalisation:

2-1 - Moyenne

$\bar{C}_1 = \frac{1+3+5}{3} = 3$; $\bar{C}_2 = \frac{2+0+4}{3} = 2$; $\bar{C}_3 = \frac{4+5+6}{3} = 5$

2-2 - Ecart-type Empirique:

$\sigma_1 = \sqrt{\frac{(1-3)^2 + (3-3)^2 + (5-3)^2}{2}} = \sqrt{\frac{4+0+4}{2}} = \sqrt{4} = 2$

$\sigma_2 = \sqrt{\frac{(2-2)^2 + (0-2)^2 + (4-2)^2}{2}} = \sqrt{\frac{0+4+4}{2}} = \sqrt{4} = 2$

$\sigma_3 = \sqrt{\frac{(4-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2}{2}} = \sqrt{\frac{1+0+1}{2}} = 1$

2-3 - Centrage et Normalisation:

$X_c = \begin{pmatrix} 1-3 & 2-2 & 4-5 \\ 3-3 & 0-2 & 5-5 \\ 5-3 & 4-2 & 6-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Matrice Centrée - Résultante $\tilde{X} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{2} & \frac{0}{2} & -\frac{1}{1} \\ \frac{0}{2} & -\frac{2}{2} & \frac{0}{1} \\ \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & \frac{1}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$C_1^1 = (-1 \ 0 \ 1)^T$; $C_2^1 = (0 \ -1 \ 1)^T$; $C_3^1 = (-1 \ 0 \ 1)^T$

Matrice de variance - Covariance $V = \frac{1}{n-1} X_c^T X_c = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$X_c^T X_c = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $V = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$V = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

IV) Matrice de Corrélation R.

$$R = \frac{1}{n-1} X^T X \quad \text{O.V.}$$

$$X^T X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 1 \\ 0,5 & 1 & 0,5 \\ 1 & 0,5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{O.V.}$$

V) Diagonalisation et Valeurs Propres

on calcule:

$$\det(V - \lambda I) = 0 \quad \text{O.V.}$$

$$\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 4-\lambda \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{O.V.}$$

$$= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 23\lambda + 12 + 8\lambda - 12$$

$$= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda = 0 \quad \text{O.V.}$$

$$\lambda = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 15 = 0 ; \quad \begin{cases} \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{21}}{2} = 2,2087 \\ \lambda_3 = \frac{3 + \sqrt{21}}{2} = 6,7913 \end{cases} \quad \text{O.V.}$$

$$\lambda_1 = 0 ; \lambda_2 = 2,2087 ; \lambda_3 = 6,7913 \quad \text{O.V.}$$

les vecteurs Propres F_i :

$$u_1 = 3 + 4,583 = 7,583$$

$$u_2 = 6,7913$$

$$u_3 = 3,3957$$

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{63 + 12\sqrt{21}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{63 - 12\sqrt{21}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{O.V.}$$

$$F_3 = \frac{1}{\sqrt{63 + 12\sqrt{21}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{O.V.}$$