

المحاضرة الثالثة: طرق حل نماذج البرمجة الخطية – الطريقة المبسطة

ما يميز الطريقة المبسطة (طريقة السمبلاكس) الدقة والكفاءة كما يمكن استخدامها لأي عدد من المتغيرات والقيود، وعملية هذه الطريقة تظهر من خلال تتبع خطوات نظامية متتالية تبدأ بالحل الممكن مروراً بالحل الأفضل وصولاً إلى الحل الأمثل؛ وتتمثل خطوات الطريقة المبسطة فيما يلي:

الخطوة الأولى: تحويل النموذج الرياضي إلى الشكل المعياري (القياسي) أي تحويل كل القيود إلى معادلات كما يلي:

- إذا كانت إشارة القيد اقل من أو تساوي (\leq) يتم إضافة متغير الفجوة (المتغير الرائد)

Slack Variable إلى الطرف الأيسر للقيد ويرمز له بالرمز ($S_i ; i = 1, 2, 3, 4, \dots, m$).

- إذا كانت إشارة القيد أكبر من أو تساوي (\geq) يتم طرح متغير الفجوة (المتغير الفائض) Surplus Variable من

الطرف الأيسر للقيد ويرمز له بالرمز ($S_i ; i = 1, 2, 3, 4, \dots, m$)، ونضيف متغير وهمي (متغير اصطناعي)

Artificial Variable إلى الطرف الأيسر ويرمز له بالرمز

($A_i ; i = 1, 2, 3, 4, \dots, m$).

- إذا كانت إشارة القيد مساوية (=) يتم إضافة متغير وهمي (متغير اصطناعي) Artificial Variable إلى الطرف

الأيسر ويرمز له بالرمز ($A_i ; i = 1, 2, 3, 4, \dots, m$).

- إعادة كتابة دالة الهدف في ضوء المتغيرات الجديدة، حيث تظهر متغيرات الفجوة بمعامل صفر (0) وتظهر المتغيرات

الاصطناعية بمعامل (M) - والتي ترمز إلى عدد كبير جدا- وبإشارة سالبة إذا كانت دالة الهدف تعظيم وإشارة سالبة إذا كانت دالة الهدف تقليل.

الخطوة الثانية: تكوين جدول الحل الأولي (الأساسي) كما يلي:

Cof		c_{ij}	0	$\pm M^*$	الطرف الأيمن للقيود
Var		x_{ij}	S_i	A_i	R.H.S
معاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف	عمود المتغيرات الأساسية	معاملات المتغيرات في القيد الأول			b_1
		معاملات المتغيرات في القيد الثاني			b_2
	
	
		معاملات المتغيرات في القيد m			b_m
Z		Z_1	Z_k	Z
C - Z		$C_1 - Z_1$	$C_k - Z_k$	

* توضع الإشارة حسب طبيعة دالة الهدف.

ملاحظات حول جدول الحل الأولي:

- 1- توضع المتغيرات الاصطناعية والراكدة كمتغيرات أساسية في جدول الحل الأولي، أما المتغيرات الفائضة فلا يمكن إن تكون كمتغيرات أساسية.
- 2- يمثل العمود الأيمن من جدول الحل الأولي الكميات أو الطرف الأيمن **Right Hand Side** للقيود أو للمعادلات في الشكل القياسي.
- 3- يمثل السطر (Z) إجمالي الربح أو التكلفة حسب طبيعة دالة الهدف، و يتم احتسابه على النحو التالي: (معامل المتغير الأساسي الأول \times معامل X_1 في القيد الأول) + (معامل المتغير الأساسي الثاني \times معامل X_1 في القيد الثاني) + + (معامل المتغير الأساسي الأخير \times معامل X_1 في القيد m)؛ وهكذا بالنسبة لجميع المتغيرات.
- كما يتم حساب قيمة دالة الهدف (Z) كما يلي: (معامل المتغير الأساسي الأول \times الطرف الأيمن للقيد الأول) + (معامل المتغير الأساسي الثاني \times الطرف الأيمن للقيد الثاني) + + (معامل المتغير الأساسي الأخير \times الطرف الأيمن للقيد m)
- 4- يسمى السطر ($C - Z$) بسطر تقييم الحل، ويمثل صافي الربح أو التكلفة حسب طبيعة دالة الهدف؛ ويتم احتسابه على النحو التالي:
- معامل المتغير في دالة الهدف - قيمة Z المقابلة له في السطر (Z)، فمثلا قيمة ($C - Z$) للمتغير X_1 هي: ($C_1 - Z_1$)
- (الخطوة الثالثة: التحقق من أمثلية الحل، وذلك من خلال فحص قيم سطر التقييم ($C - Z$) والذي يعبر عن مدى مساهمة كل متغير من متغيرات دالة الهدف عند إضافة وحدة واحدة، ويتم التحقق من شرط الأمثلية كما يلي:
- إذا كانت دالة الهدف تعظيم (Max) فان الحل الأمثل يتحقق عندما تكون جميع قيم السطر ($C - Z$) سالبة أو معدومة ($C - Z \leq 0$).
- إذا كانت دالة الهدف تقليل (Min) فان الحل الأمثل يتحقق عندما تكون جميع قيم السطر ($C - Z$) موجبة أو معدومة ($C - Z \geq 0$).
- وفي حالة تحقق شرط الأمثلية يتم التوقف عند هذه الخطوة ويكون الحل المتحقق هو الحل الأمثل، وإذا لم يتحقق شرط الأمثلية يتم الانتقال إلى الخطوة الرابعة.

الخطوة الرابعة:

أ- تحديد عمود الدوران بتحديد المتغير الداخلى إلى الأساس وهو المتغير الذي يقابل أعلى قيمة في سطر التقييم ($C - Z$) وذات إشارة موجبة إذا كانت دالة الهدف تعظيم (Max) أو إشارة سالبة إذا كانت دالة الهدف تقليل (Min).

ب- تحديد سطر الدوران بتحديد المتغير الخارج من الأساس والذي يقابل اقل حاصل قسمة بين عناصر الطرف الأيمن للقيود وعناصر عمود الدوران (العناصر السالبة والمعدومة في عمود الدوران لا تأخذ بعين الاعتبار)، ويسمى عنصر تقاطع سطر وعمود الدوران بعنصر الدوران (عنصر الارتكاز).

ج- الانتقال إلى جدول سمبلكس جديد عن طريق:

- تحسب قيم سطر المتغير الداخلى إلى الأساس عن طريق قسمة قيم سطر الدوران على عنصر الدوران، ويسمى السطر الناتج بسطر العمل $Working Row$ أو المعادلة المحورية.

- تحسب قيم الأسطر الأخرى باستخدام القاعدة التالية:

قيم السطر الجديدة = القيمة القديمة للسطر - (الرقم المناظر لعنصر الدوران في السطر × الرقم المقابل في سطر العمل)

الرقم المناظر لعنصر الدوران في السطر هو الرقم الذي يقع أسفل أو أعلى عنصر الدوران.

ويمكن كذلك حساب قيم الأسطر الأخرى باستخدام القاعدة التالية:

العنصر الجديد = العنصر القديم + (المقابل في سطر الدوران × المقابل في عمود الدوران) / عنصر الدوران.

- حساب قيم السطر (Z) وقيم السطر ($C - Z$).

وبعد الانتهاء من الحساب نقوم بالتحقق من أمثلية الحل كما مر في الخطوة الثالثة.

مثال: تختص مؤسسة في صناعة ثلاث أنواع من الأثاث الخشبي: مكاتب، طاولات، كراسي، أظهر التحليل الفني للإنتاج الأسبوعي بيانات الجدول التالي:

الحد الأقصى المتاح من الموارد	متطلبات الوحدة الواحدة من الموارد			المنتجات الموارد
	الكراسي	الطاولات	المكاتب	
400 متر مربع	01 متر مربع	02 متر مربع	04 متر مربع	المادة الأولية (2م)
600 ساعة	04 ساعة	02 ساعة	02 ساعة	اليد العاملة (سا)
400 ساعة	01 ساعة	02 ساعة	01 ساعة	قوى محركة (سا)
	100 دينار	160 دينار	200 دينار	الربح الوحدوي

المطلوب: أوجد خطة الإنتاج الأسبوعية التي تحقق أكبر ربح ممكن.

الحل: 1- كتابة النموذج الرياضي للمسألة:

نقترض أن x_1 : عدد المكاتب المنتجة أسبوعيا. x_2 : عدد الطاولات المنتجة أسبوعيا. x_3 : عدد الكراسي المنتجة أسبوعيا.

$$\text{Max } Z = 200 x_1 + 160 x_2 + 100 x_3$$

Subject to:

$$4 x_1 + 2 x_2 + x_3 \leq 400$$

$$2 x_1 + 2 x_2 + 4 x_3 \leq 600$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 400$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

2- كتابة النموذج على الشكل المعياري

$$\text{Max } Z = 200 x_1 + 160 x_2 + 100 x_3 + 0 S_1 + 0 S_2 + 0 S_3$$

Subject to:

$$4 x_1 + 2 x_2 + x_3 + S_1 = 400$$

$$2 x_1 + 2 x_2 + 4 x_3 + S_2 = 600$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + S_3 = 400$$

$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

3 - إعداد جدول الحل الأولي:

Cof		200	160	100	0	0	0	R.H.S
Var		x ₁	x ₂	x ₃	S ₁	S ₂	S ₃	
0	S ₁	4	2	1	1	0	0	400
0	S ₂	2	2	4	0	1	0	600
0	S ₃	1	2	1	0	0	1	400
Z		0	0	0	0	0	0	0
C-Z		200	160	100	0	0	0	

ونلاحظ من جدول الحل الأولي ما يلي:

$$S_1 = 400, S_2 = 600, S_3 = 400$$

- قيمة دالة الهدف تساوي صفر، وقيم المتغيرات الراكدة هي:

وهذا يدل على عدم استغلال الموارد المتاحة، أي أن عملية الإنتاج لم تبدأ بعد.

- يتم احتساب قيم السطر (Z) كما يلي:

$$Z_1 = 0 \times 4 + 0 \times 2 + 0 \times 1 = 0. \quad Z_2 = 0 \times 2 + 0 \times 2 + 0 \times 2 = 0. \quad Z_3 = 0 \times 1 + 0 \times 4 + 0 \times 1 = 0$$

$$Z_4 = 0 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 0. \quad Z_5 = 0 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 0. \quad Z_6 = 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 1 = 0$$

$$Z = 0 \times 400 + 0 \times 600 + 0 \times 400 = 0 \quad \text{قيمة دالة الهدف}$$

- يتم احتساب قيم السطر (Z - C) كما يلي: معامل المتغير في دالة الهدف - قيمة Z المقابلة له في السطر (Z).

$$C_1 - Z_1 = 200 - 0 = 200. \quad C_2 - Z_2 = 160 - 0 = 160. \quad C_3 - Z_3 = 100 - 0 = 100.$$

$$C_4 - Z_4 = 0 - 0 = 0. \quad C_5 - Z_5 = 0 - 0 = 0. \quad C_6 - Z_6 = 0 - 0 = 0.$$

- التحقق من أمثلية الحل، وبما أن دالة الهدف تعظيم (Max) فإن الحل الأمثل يتحقق عندما تكون جميع قيم السطر (C - Z) سالبة أو معدومة ($C - Z \leq 0$)، ومن خلال فحص قيم سطر التقييم (C - Z) نلاحظ وجود قيم موجبة وهذا يعني أن الحل ليس أمثل، لذلك نبحث عن حل أفضل من خلال تحديد المتغير الذي سيدخل إلى الأساس وتحديد المتغير الذي سيغادر الأساس.

وبما أن دالة الهدف تعظيم (Max) فإن المتغير الذي سيدخل إلى الأساس هو المتغير الذي يقابل أعلى قيمة موجبة في سطر التقييم (C - Z) لأنها تعطي أعلى مساهمة في دالة الهدف وهو المتغير (x₁) والذي يقابل القيمة (200) وعموده هو عمود الدوران.

ولتحديد المتغير الذي سيغادر الأساس نقسم قيم عمود الكميات على القيم المقابلة لها في عمود الدوران كما يلي:

قيم عمود الكميات	÷	قيم عمود الدوران	نتائج حاصل القسمة
400	÷	4	=100
600	÷	2	=300
400	÷	1	=400

ونختار أقل حاصل قسمة (100)، وبذلك (S_1) هو المتغير الذي سيغادر الأساس وسطره هو سطر الدوران، والرقم (4) هو عنصر الدوران كما هو موضح في الجدول التالي.

Cof		200	160	100	0	0	0	R.H.S
Var		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	4	2	1	1	0	0	400
0	S_2	2	2	4	0	1	0	600
0	S_3	1	2	1	0	0	1	400
Z		0	0	0	0	0	0	0
C-Z		200	160	100	0	0	0	0

عمود الدوران

عنصر الدوران (عنصر الارتكاز)

سطر الدوران

- الانتقال إلى جدول سيميلكس جديد نحصل من خلاله على حل أفضل من الحل الأولي وذلك بعد إجراء التعديلات التالية

- نحسب قيم سطر المتغير الذي دخل إلى الأساس عن طريق قسمة قيم سطر الدوران على عنصر الدوران،

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
قيم سطر العمل	4/4	2/4	1/4	1/4	0/4	0/4	400/4
	1	1/2	1/4	1/4	0	0	100

- نحسب قيم السطر الثاني (S_2) باستخدام القاعدة التالية:

قيم السطر (S_2) الجديدة = القيمة القديمة للسطر (S_2) - (الرقم المناظر لعنصر الدوران في السطر (S_2) × الرقم المقابل في سطر العمل)

S_2	2	2	4	0	1	0	600
-(2)	1	1/2	1/4	1/4	0	0	100
=	0	1	7/2	-1/2	1	0	400

- تحسب قيم السطر الثاني (S_3) باستخدام القاعدة التالية:

قيم السطر (S_3) الجديدة = القيمة القديمة للسطر (S_3) - (الرقم المناظر لعنصر الدوران في السطر (S_3) × الرقم المقابل في سطر العمل)

S_3	1	2	1	0	0	1	400
-(1)	1	1/2	1/4	1/4	0	0	100
=	0	3/2	3/4	-1/4	0	1	300

- يتم احتساب قيم السطر (Z) كما يلي:

$$Z_1 = 200 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 200.$$

$$Z_2 = 200 \times 1/2 + 0 \times 1 + 0 \times 3/2 = 100.$$

$$Z_3 = 200 \times 1/4 + 0 \times 7/2 + 0 \times 3/4 = 50.$$

$$Z_4 = 200 \times 1/4 + 0 \times (-1/2) + 0 \times (-1/4) = 50.$$

$$Z_5 = 200 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 0.$$

$$Z_6 = 200 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 1 = 0$$

$$Z = 200 \times 100 + 0 \times 400 + 0 \times 300 = 20000 \quad \text{قيمة دالة الهدف:}$$

- يتم احتساب قيم السطر ($Z - C$) كما يلي: معامل المتغير في دالة الهدف - قيمة Z المقابلة له في السطر (Z).

$$C_1 - Z_1 = 200 - 200 = 0. \quad C_2 - Z_2 = 160 - 100 = 60. \quad C_3 - Z_3 = 100 - 50 = 50.$$

$$C_4 - Z_4 = 0 - 50 = -50. \quad C_5 - Z_5 = 0 - 0 = 0. \quad C_6 - Z_6 = 0 - 0 = 0.$$

ويعوجب الحسابات السابقة نحصل على الجدول التالي.

Cof		200	160	100	0	0	0	R.H.S
Var		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
200	x_1	1	1/2	1/4	1/4	0	0	100
0	S_2	0	1	7/2	-1/2	1	0	400
0	S_3	0	3/2	3/4	-1/4	0	1	300
Z		200	100	50	50	0	0	20000
C-Z		0	60	50	-50	0	0	

وبعد الانتهاء من الحساب نقوم بالتحقق أمثلية الحل، ومن خلال فحص قيم سطر التقييم ($C - Z$) نلاحظ وجود قيم موجبة وهذا

يعني أن الحل ليس أمثل، لذلك نبحث عن حل أفضل من خلال تحديد المتغير الذي سيدخل إلى الأساس وتحديد المتغير الذي سيغادر الأساس.

- تحسب قيم سطر العمل.

- تحسب قيم الأسطر الأخرى.

- حساب قيم السطر (Z) وقيم السطر (C - Z).

Cof		200	160	100	0	0	0	R.H.S
Var		x ₁	x ₂	x ₃	S ₁	S ₂	S ₃	
200	x ₁	1	0	0	1/3	0	-1/3	0
0	S ₂	0	0	3	-1/3	1	-2/3	200
160	x ₂	0	1	1/2	-1/6	0	2/3	200
Z		200	160	80	40	0	40	32000
C-Z		0	0	20	-40	0	-40	

وبعد الانتهاء من الحساب نقوم بالتحقق أمثلية الحل، ومن خلال فحص قيم سطر التقييم (C - Z) نلاحظ وجود قيم موجبة وهذا يعني أن الحل ليس أمثل، لذلك نبحث عن حل أفضل من خلال تحديد المتغير الذي سيدخل إلى الأساس وتحديد المتغير الذي سيغادر الأساس.

- تحسب قيم سطر العمل.

- تحسب قيم الأسطر الأخرى.

- حساب قيم السطر (Z) وقيم السطر (C - Z).

Cof		200	160	100	0	0	0	R.H.S
Var		x ₁	x ₂	x ₃	S ₁	S ₂	S ₃	
200	x ₁	1	0	0	1/3	0	-1/3	0
100	x ₃	0	0	1	-1/9	1/3	-2/9	200/3
160	x ₂	0	1	0	-1/9	-1/6	7/9	500/3
Z		200	160	100	340/9	20/3	320/9	100000/3
C-Z		0	0	0	-340/9	-20/3	-320/9	

وبعد الانتهاء من الحساب نقوم بالتحقق أمثلية الحل، ومن خلال فحص قيم سطر التقييم (C - Z) نلاحظ كل القيم سالبة أو معدومة وهذا يعني أن الحل أمثل، وهو:

$$x_1 = 0, x_2 = 500/3, x_3 = 200/3, S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 0$$

$$Z = 100000/3$$