قسم الاعلام الآلي	جـــامعة الــوادي	مقياس طرق عددية
سنة ثانية اعلام آلي	كلية العلوم الدقيقة	2024/2023
2024/01/07	تصحيح امتحان الدورة العادية للسداسي الأول	المدّة: 1 سا 30 د

حل تمرين1: (08 نقاط)

1. اثبات أنّ A متناظرة. لدينا

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, A^T=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$ وبما أنّ $A^T = A$ فإنّ A متناظرة.

2. هل A معرّفة موجبة؟ برّراجابتك. لنثبت أنّ: $\forall X \neq 0 : X^T AX > 0 \ / \ X^T = (x_1, x_2, x_3)$

$$X^T AX = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (2x_1 - x_2, -x_1 + 3x_2 - x_3, -x_2 + 2x_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
$$= 2x_1^2 - x_1x_2 - x_2x_1 + 3x_2^2 - x_2x_3 - x_3x_2 + 2x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 > 0$$

3. هل A ذات قطر مسيطر؟ برّراجابتك.

A ذات قطر مسيطر لأنّ: $2 > 1 + 0,\ 3 > 1 + 1,\ 2 > 1 + 0$

4. ايجاد القيم الذاتية للمصفوفة A .

المعادلة المميزة $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left[(3-\lambda)(2-\lambda) - (-1)(-1)\right] - (2-\lambda) = 0$$
$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = (2-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 1) \vee (\lambda = 2) \vee (\lambda = 4)$$

5. عيّن قيمة الشعاع الطيفي واستنتج $\|A\|_2$

$\rho(A) = \max\{1, 2, 4\} = 4$ هو الشعاع الطيفي ويكون $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A)} = \sqrt{4} = 2$

تمرين2: (12 نقطة)

لتكن الجملة الخطيّة التالية المعرّفة على الشكل المصفوفي $AX = B$ حيث

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. حساب محدّد A واستنتاج أن الجملة $AX = B$ تقبل حلولا.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(1\times 1 - 2\times 1) - 2(1\times 1 - 2\times 1) - 2(1\times 2 - 2\times 1) = 1$$

بما أنّ $\det(A) = 1 \neq 0$ فإنّ الجملة $AX = B$ تقبل حلا وحيدا.

2. حساب $A^{(1)}$ ، $A^{(2)}$ و $A^{(3)}$.(باستعمال طريقة الحذف لغوص)

$$A^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & -2 \end{array}\right) \quad A^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & -2 \end{array}\right) \quad A^{(3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

3. ايجاد الشعاع X الجملة $AX = B$ تكافي الجملة التالية:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_2 + 3x_3 = -1 \\ -x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

4. المصفوفة A تقبل تفكيكا على الشكل LU لأنّ:

$$\det(A_1) = |2| = 2 \neq 0, \det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \det(A_3) = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

5. حساب الجداء المصفوفي

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2-1 & -2+3 \\ 2 & 4-2 & -4+6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

6. حل الجملة $AX = B$ باستعمال طريقة التفكيك LU. مما سبق لدينا $A = LU$ حيث:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ ولدينا } AX = B \Leftrightarrow LUX = B \Leftrightarrow \begin{cases} LY = B \\ UX = Y \end{cases}$$

$$LY = B \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_1 + y_2 = 0 \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -1 \\ y_3 = 0 \end{cases} \text{ و } UX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_2 + 3x_3 = -1 \\ -x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

7. المقارنة بين $A^{(3)}$.و U كذلك بين Y .و $B^{(3)}$

نلاحظ أنّ: $U = A^{(3)}$ و $B^{(3)} = Y$ ونستنتج أنّ طريقة التفكيك هي نتيجة من طريقة الحذف لغوص.