République algérienne démocratique et populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur

et de la Recherche Scientifique

Université Hama Lakhdar à El Oued - Algérie

Spécialisation : Mathématiques

Master LMD

Modélisation de la mécanique des mieux continus

Leçons et exercices

Mr. Latoufa Yassine

Maître de conférences A

à l'Université Hama Lakhdar à El Oued – Algérie

2024

Table des matières

Introduction

Il s'agit d'un document simple qui présente des équations générales du point de vue de la mécanique des milieux continus. Le matériel fourni convient à un cours de mathématiques appliquées d'un semestre et est suffisamment flexible pour être proposé soit aux étudiants du premier cycle supérieur, soit aux étudiants juniors se spécialisant en mathématiques appliquées, en ingénierie ou en physique. La présentation suppose que les étudiants possèdent des connaissances dans les domaines de la théorie matricielle, de l'algèbre linéaire et du calcul avancé. Chaque section comprend plusieurs exemples illustratifs réels. Ce document aide à créer une base permettant aux étudiants de comprendre et de modéliser les phénomènes connexes les plus complexes dans divers domaines.

Chapitre 1

Modélisation

Considérons un fluide occupant un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ pendant un intervalle de temps $[0;T]$. Le fluide est caractérisé en tout point $x \in \Omega$ et pour tout $t \in [0;T]$ par :

— sa vitesse $u(x;t)$,

— sa densité $\varrho(x;t)$,

— sa pression $p(x;t)$,

— sa températur $T(x;t)$,

Le fluide vérifie les lois générales de conservation de :

— la masse,

— la quantité du mouvement, ou moment cinétique,

— La loi de conservation de l'énergie.

dans lesquelles interviennent des "lois de comportement" dépendant du fluide (incompressibilité, homogénéité, relation entre forces de frottement et déformations,...).

L'objet de ce chapitre est d'exprimer ces lois par des équations aux dérivées partielles

1.1 Incompressibilité

Considérons la partie du fluide occupant une région Ω à un instant t_0. Son volume est $V = \int_\omega dx$. Suivons le mouvement de cette partie du fluide.

A l'instant $t \geq t_0$, on note $y(x;t)$ la position de la particule située en x à l'instant t ;

$$Y(t) = \{y(x,t) : x \in \omega\}$$

est la région occupée.

Le volume occupé à l'instant t est

$$V(t) = \int_{Y(t)} dy.$$

En effectuant le changement de variable $y \longrightarrow x$ il vient

$$V(t) = \int_\omega \det \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x,y)dx. \tag{1.1}$$

Sa dérivée est

$$\frac{dV}{dt}(t) = \int_\omega \frac{\partial}{\partial t} det \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x,y)dx. \tag{1.2}$$

Un fluide est dit incompressible si le volume occupé par toute partie du fluide se conserve dans son mouvement. C'est équivalent à la nullité de la dérivée du volume, c'est-à dire :

$$\forall t, \forall \omega, \frac{\partial}{\partial t} \det \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x,t_0) = 0, \forall x, \forall t_0. \tag{1.3}$$

Calculons cette quantité. On a

$$\det \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \det \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \frac{\partial y}{\partial x_3} \right). \tag{1.4}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \det \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \det \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \frac{\partial y}{\partial x_3} \right) + \\ \det \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x_2}, \frac{\partial y}{\partial x_3} \right) + \\ \det \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x_3} \right). \end{aligned} \tag{1.5}$$

La vitesse du fluide au point $y(x;t)$ à l'instant t est

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, y) = u\left(y(x,t), t\right). \tag{1.6}$$

A l'instant t_0 on a $y(x;t_0) = x$ donc

$$\frac{\partial y}{\partial x_j}(x, t_0) = \frac{\partial x}{\partial x_j} = e_j \text{ (j}^{eme}\text{vecteur de base).} \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t_0) = u(x, t_0). \tag{1.8}$$

D' où

$$\det \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \frac{\partial y}{\partial x_3} \right) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & 1 & 0 \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}. \tag{1.9}$$

On calcule de même les autres déterminants, d'où

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \det \frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)(x, t_0) = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)(x, t_0) = (\operatorname{div} u)(x, t_0) \tag{1.10}$$

L'incompressibilité est équivalente à

$$\operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \omega \times]0, T[\;\; . \tag{1.11}$$

Ces calculs n'ont de sens que si v est assez régulier.

Remarque 1.1.1 *Pour toute fonction scalaire φon a*

$$\int_\omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\partial \omega} \varphi(s) n_i(s) ds \tag{1.12}$$

où

$\partial\omega$ est la frontière de ω .

$n(s)$ est la normale extèrieure en s à $\partial\omega$.

ds est la mesure superficielle sur $\partial\omega$.

Si u est une fonction vectorielle on a donc la formule de Gauss-Ostrogradski.

$$\int_\omega (\operatorname{div} V)(x) dx = \int_{\partial\omega} V(s).n(s) ds. \tag{1.13}$$

La dérivée du volume occupé à l'instant t par le fluide qui occupait la région ω à l'instant t_0 vaut, d'après (1.3) et (1.10) à

$$\frac{dV}{dt}(t_0) = \int_\omega (\operatorname{div} u)(x, t_0) dx = \int_{\partial\omega} u(s, t_0).n(s) ds. \tag{1.14}$$

En observant que $u.n$ est le flux à travers la surface $\partial\omega$, cette formule exprime le fait que la variation de volume est ègale à l'intègrale du flux.

1.2 Conservation de la masse

Considérons à nouveau la partie du fluide qui occupe la règion ω à l'instant t_0. Sa masse est $M = \int_\omega \varrho(x;t_0)dx$. A l'instant $t \geq t_0$ cette partie du fluide occupe la règion $Y(t)$ et sa masse est

$$M = \int_{Y(t)} \varrho(y;t)dy \tag{1.15}$$

En effectuant le changement de variable $y \longrightarrow x$ il vient

$$M = \int_\omega \varrho(x;t)dx \tag{1.16}$$

où

$$\varphi(x,t) = \varrho(y(x;t),t)\left(\det \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x,t)\right) \tag{1.17}$$

La loi de conservation de la masse dit que M est indèpendant de t , donc que sa dérivée est nulle, i.e.

$$\int_\omega \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t_0)dx = 0, \forall \omega, \forall t_0 \tag{1.18}$$

ce qui est èquivalent à

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t_0) = 0, \forall \omega, \forall t_0 \tag{1.19}$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}\,(y(x,t),t) + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \varrho}{\partial x_i}\,(y(x,t),t)\,\frac{\partial y_i}{\partial t}(x,t))(\det \frac{\partial y_i}{\partial t})(x,t) \\ +\varrho\,(y(x,t),t)\,(\frac{\partial}{\partial t}\det \frac{\partial y_i}{\partial x_j})(x,t)\end{aligned} \tag{1.20}$$

Rappelons, que

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x,t) = \delta_{ij} \quad (\delta_{ij} \;= 1 \text{ si } i = j \quad , \; \delta_{ij} \;= 0 \;\text{ si }\; i \neq j). \tag{1.21}$$

donc

$$\left(\det \frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)(x,t) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \tag{1.22}$$

et il vient donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t_0) &= \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t}(x,t_0) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \varrho}{\partial x_i}\,(x,t_0)\, u_i(x,t_0)\right) \times 1 + \varrho(x,t_0) \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\,(x,t_0) \\ &= \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \varrho u_i}{\partial x_i}\right)(x,t_0) \end{aligned} \tag{1.23}$$

Donc l'équation (1.19) de conservation de la masse est èquivalente à

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho u) = 0 \text{ dans } \omega \times \,]0,T[\tag{1.24}$$

1.3 Conservation et dérivation d'une grandeur générale.

Soit φ une grandeur liée au fluide (densité, pression, ...) définie en tout point x et à tout instant t. Sa valeur totale dans une région ω à l'instant t_0 est $\Phi(t_0) = \int_\omega \varphi(x;t_0)dx$

.

A l'instant $t \geq t_0$ cette partie du fluide occupe la règion $Y(t)$ et on définit.

$$\Phi(t) = \int_{Y(t)} \varphi(x,t_0)dy \tag{1.25}$$

Les calculs ci-dessus montrent, en remplaçant ϱ par que ϕ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t_0) = \int_\omega \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi u) \right)(x, t_0) dx \tag{1.26}$$

De façon générale la conservation de ϕ est donc èquivalente à

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi u) = 0 \tag{1.27}$$

On retrouve la conservation du volume (incompressibilité) en prenant $\varphi \equiv 1$, et la conservation de la masse en prenant $\varphi = \varrho$.

Remarque 1.3.1 *Avec la formule de* ***Gauss-Ostrogradski*** *il vient*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t_0) = \int_\omega \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t_0) dx + \int_{\partial\omega} \varphi(s, t_0) u(s, t_0) n(s) ds \tag{1.28}$$

Ce qui s'interprète ainsi :

· *la* 1^{ere}*intègrale reprèsente la variation de* φ *dans le domaine fixe* ω.

· *la* 2^{eme} *intègrale reprèsente le flux de* φ *à travers la frontière* $\partial\omega$.

1.4 Conservation du moment cinétique.

Considérons encore lefluide qui occupe la règion ω au temps t_0. Son moment cinétique est $M = \int_\omega \varrho(x; t_0) u(x; t_0) dx$. A l'instant t ce fluide occupe la règion $Y(t)$ et son moment cinètique (ou quantité de mouvement) est

$$M(t) = \int_{Y(t)} \varrho(y; t) u(y; t) dy \tag{1.29}$$

En l'absence de forces ce moment serait conservé. En présence de forces internes F^{inter} ou externes F^{exter} la dérivée de la quantité de mouvement égale la force appliquée.

$$\frac{dM}{dt}(t_0) = \int_\omega F(x, t_0)dx \tag{1.30}$$

où

$$F = F^{inter} + F^{exter}. \tag{1.31}$$

Les forces externes. Par exemple la gravitation.

$$F^{exter} = \varrho g \text{ où } g \text{ est le champ de gravité.} \tag{1.32}$$

Les forces internes. Sont celles contraintes résultant des pressions et du mouvement permenant entre les particules d'un fluide, Elles sont reliées à la vitesse u et la pression p.

Les grandeurs M sont vectorielles, on va calculer la i^{eme} composante. D'après (1.26) il vient

$$\int_\omega \left(\frac{\partial \varrho u_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho u_i u) \right)(x, t_0)dx = \int_\omega F_i(x, t_0)dx \tag{1.33}$$

Ceci est vérifié pour tout ω , t_0 et i donc, $\forall i$,

$$\frac{\partial \varrho u_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho u_i u) = F_i \text{ dans } \omega \times]0, T[\tag{1.34}$$

Le premier membre peut s'écrire

$$u_i \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\varrho u_j) \right) + \varrho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \tag{1.35}$$

D'aprés l'équation (1.24) de conservation de la masse le 1^{er} terme est nul.

L'équation (1.34) de conservation du moment cinétique s'écrit alors

$$\varrho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+\sum_j u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=\varrho g_i+F_i^{inter} \tag{1.36}$$

g_i la i^{ieme} composante du champ gravitationnelle g .

1.5 Lois de comportement des fluides classiques

La question posée : Quelle est la forme de la relation entre la force interne F^{inter} , la vitesse u et la pression p. Chaque fluide est caractérisé par un specifiaue loi de comportement prenant en compte les forces suivantes

La force de pression.

$$F^{press}=-\nabla p \tag{1.37}$$

où ∇ est le vecteur gradient de composantes $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ $(i=1,2,3)$.

Observons que la force totale due à la pression p est

$$\int_{\omega}-(\nabla p)(x,t)dx=\int_{\partial\omega}-p(s,t)n(s)ds \tag{1.38}$$

Il s'agit donc de la force exercée sur le fluide occupant la région ω par le materiale occupant la région $\Omega\backslash\omega$.

La force de frottement des particules

Elle est liée aux déformations du fluide en mouvement triaxial. Sa $i^{‘eme}$ composante est

$$F_i^{frott}=\lambda\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{3}d_{jj}\left(u\right)\right)+2\mu\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}d_{ij}\left(u\right). \tag{1.39}$$

où λ et μ sont des coefficients de viscosité et où $D=\left(d_{ij}\left(u\right)\right)$ est le tenseur des vitesses de déformation, de composantes

$$d_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), 1 \leq i\ ,\ j \leq 3 \tag{1.40}$$

Donc

$$\begin{aligned} F_i^{frott} &= \lambda \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) + \mu \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}\right) \\ &= (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_j} \operatorname{div} u + \mu \Delta u_i \end{aligned} \tag{1.41}$$

L'équation(1.36) de conservation du moment cinétique pour un fluide classique est donc $\forall i$.

$$\varrho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) - (\lambda + \mu)\frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial x_i} - \mu \Delta u_i = \varrho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{1.42}$$

Ce qui s'écrit, sous forme vectorielle :

$$\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u\right) - (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} u - \mu \Delta u = \varrho g - \nabla p \tag{1.43}$$

Remarque 1.5.1 *Les forces internes F^{inter} s'écrit encore $F^{inter} = (F_i^{inter})_i$,*

$$F_i^{inter} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad (i{=}1,2\,;3) \tag{1.44}$$

où

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda \sum_{i=1}^{3} d_{ii}\delta_{ij} + 2\mu d_{ij} \tag{1.45}$$

Les σ_{ij} forment le tenseur des contraintes et cette relation et elle s'appelle *loi decomportement.*

Remarque 1.5.2 *La loi de comportement (1.45) s'écrivent de manière vectorielle*

$$\sigma = 2\mu D(u) + \lambda Tr D(u) Id_3 - p Id_3 \tag{1.46}$$

où

– $D = (d_{ij}(u))$ est le tenseur des taux de déformation (défini par (1.40)).

– Id_3 est la matrice identité de rang 3.

– $TrD(u)$ désigne la trace de $D(u)$ définie par

$$TrD(u) = \sum_{i=1}^{3} d_{ii}(u) \tag{1.47}$$

Remarque 1.5.3 *Un fluide est dit* ***parfait*** *si les forces de frottement sont nulles, donc si les coéfficients de viscosité λet μ sont nuls.*

Remarque 1.5.4 *La conservation du moment pour un fluide parfait est donc*

$$\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u.\nabla)u\right) = \varrho g - \nabla p \tag{1.48}$$

Forme générale de l'équation du mouvement :

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u\right) = \mathrm{div}(\sigma) + f \tag{1.49}$$

où $f = (f_i)$ un champs de forces extérieures et $\sigma = (\sigma_{ij})$ est le tenseur des contraintes (qui exprime les forces intérieure).

1.6 Modèles des fluides Navier – Stokes

En dimension 3 on a 5 inconnues scalaires : u_1, u_2, u_3, p et ϱ.

La conservation de la masse et du moment donnent les équations(1.24) et (1.43), c'est-à-dire 4 équations scalaires.

Il manque une équation, on considère l'incompressibilitéqui comme une loi supplémentaire. On a vu (1.11)que

$$\operatorname{div} u = 0 \tag{1.50}$$

Un fluide visqueux et incompressible est donc décrit par les équations suivantes,

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 \\ \dfrac{\partial \varrho}{\partial t} + u.\nabla \varrho = 0 \\ \varrho \left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + (u.\nabla) u \right) - \mu \Delta u = \varrho g - \nabla p \end{cases} \tag{1.51}$$

dites de Navier–Stokes avec densité variable (i.e. Navier–Stokes Non-Homogène).

Equations de Navier–Stokes Homogène.

Le fluide est dit homogène si sa densité est indépendante de x. Alors l'équation de conservation de la masse se réduit à $\dfrac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$ donc finalement à $\varrho = \varrho_0$ constante indépendante de x et t.

Un fluide visqueux incompressible et homogéne est donc décrit par les équations suivantes, dites de **Navier–Stokes**.

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + (u.\nabla) u - \nu \Delta u = g - \nabla p \end{cases} \tag{1.52}$$

où

$\nu = \dfrac{\mu}{\varrho_0}$est le coefficient de viscosité cinématique.

$\nu = \dfrac{p}{\varrho_0}$est la pression normalisée.

Equations d'Euler.

Un fluide est dit parfait s'il est non visqueux, c'est à-dire si les forces internes de frottement sont nulles, donc si les coefficients λ et μ sont nuls. Donc $\nu = 0$.

Un fluide parfait incompressible et homogène est donc décrit par les équation suivantes, dites d'Euler.

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + (u.\nabla)u = g - \nabla p. \end{cases} \tag{1.53}$$

Equations de Navier–Stokes linéarisées.

Lorsque la vitesse u est assez petite, le terme non-linéaire $(u.\nabla)u$ peut être négligé.

Un fluide incompressible et homogène animé d'un mouvement assez lent est donc d´écrit par les équations linéarisées suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u = g - \nabla p. \end{cases} \tag{1.54}$$

Equations de Stokes

Un fluide parfait incompressible, homogène et d'un écoulement stationnaires est donc décrit par les équation suivantes,

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 \\ -\nu\Delta u = g - \nabla p. \end{cases} \tag{1.55}$$

dites d'Stokes.

(Ecoulements stationnaires, lorsque la vitesse ne varie pas avec le temps)

1.7 La loi de conservation de l'énergie

Le premier principe de la thermodynamique établit que, lors de toute transformation, il y a conservation de l'énergie, Si le système est fermé, la variation de son énergie est égale à la la quantité d'énergie échangée avec le milieu extérieur, par transfert thermique (chaleur) et transfert mécanique (travail). Ce qui donne la loi suivante :

$$\rho \frac{dE}{dt} = \sigma.D(u) - \mathrm{div}(q) + R \tag{1.56}$$

t.q.

$$\begin{cases} \dfrac{dE}{dt} = \dfrac{\partial E}{\partial t} + u.\nabla E \\ \sigma.D(u) = \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij} d_{ij}(u) \end{cases} \tag{1.57}$$

où

- E est l'énergie interne spécifique du milieu continu .

- R est l'apport d'énergie par unité de masse et de temps .

- q , de composantes q_i , est le vecteur transfert thermique.

- $D(u)$ est le tenseur des taux de déformation, avec des composantes

$$d_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), 1 \leq i \ , \ j \leq 3$$

Récapitulation. Les lois de conservation nous fournissent trois équations scalaires et vectorielles :

1. L'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u.\nabla \rho + \rho \, \mathrm{div}(u) = 0 \tag{1.58}$$

2. Les équations du mouvement :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u\right) = \mathrm{div}(\sigma) + f \tag{1.59}$$

3. L'équation de l'énergie :

$$\rho\left(\frac{\partial E}{\partial t}+u.\nabla E\right)=\sigma.D(u)-\mathrm{div}(q)+R.$$

Remarque 1.7.1 *Sachant que le tenseur des contraintes σ est symétrique ($\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$), le problème comporte quatorze inconnues ; les six composantes σ_{ij}, les trois composantes u_i de la vitesse, la densité ρ, l'énergie interne E ; en plus les composantes q_i du vecteur transfert thermique.*

Remarque 1.7.2 *D'un point de vue mathématique et physique, cinq équations ne suffisent pas pour déterminer quatorze inconnues. Les lois de conservation doivent être complétées par d'autres relations.*

On suppose que

- l'énergie interne du fluide est donnée par la loi

$$\left(\frac{\partial E}{\partial t}+u.\nabla E\right)=C_v(T)\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u.\nabla T\right)$$

où $C_v(T)$ désigne la chaleur spécifique à volume constant .

- l'apport d'énergie R dépend de la température T

$$R=R(T)$$

- le vecteur transport d'énergie q est donné par la loi de Fourier

$$q=-K(T)\nabla T$$

Dans ces conditions l'équation de l'énergie s'écrit

$$C_v(T)\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u.\nabla T\right)=\sigma.D(u)+\operatorname{div}\left(K(T)\nabla T\right)+R(T). \tag{1.60}$$

1.8 Modèle Non-isotherme d'un fluide Newtonienne

Les équations fondamentales pour l'écoulement non isotherme d'un fluide Newtonienne sont représentées par les équations, (1.58)–(1.60) avec

- la loi de comportement du fluide Newtonienne ;

$$\sigma = 2\mu D(u) + \left[\lambda \mathrm{Tr} D(u) - p\right] Id_3 \text{ dont une viscosité dépend de la températureT;}$$

$$\mu = \mu(T);$$

- la condition d'incompressibilité ;

$$\operatorname{div} u = 0.$$

Ecoulement Non-isotherme du fluide Newtonienne, incompressible, Homogène.

Il est possible de fixer $\rho = 1$.

On sait que $\mathrm{Tr}D(u) = \operatorname{div} u = 0$. Le terme : $\sigma.D$ dans (1.60) peut être simplifié,

$$\sigma.D(u) = \left(2\mu(T)D(u) - pI\right).D(u) = 2\mu(T)D(u).D(u)$$

et l'équation de l'énergie (1.60) devient

$$C_v(T)\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u.\nabla T\right)=2\mu(T)D(u).D(u)+\operatorname{div}\left(K(T)\nabla T\right)+R(T). \tag{1.61}$$

Finalement, les équations générales de *l'écoulement non isotherme d'un fluide Navier – Stokes Homogéne* sont données par le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u = \operatorname{div}(\sigma) + f \\ \sigma = 2\mu(T)D(u) - pId_3 \\ \operatorname{div}(u) = 0 \\ C_v(T)\left(\dfrac{\partial T}{\partial t} + u.\nabla T\right) = 2\mu(T)D(u).D(u) + \operatorname{div}(K(T)\nabla T) + R(T) \end{cases} \tag{1.62}$$

- Lorsque la vitesse v est suffisamment petite, le terme non linéaire $(u.\nabla)u$ peut être négligé. Par conséquent, *le faible écoulement non isotherme d'un fluide Navier-Stokes Homogéne* sont données par les équations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\sigma) + f \\ \sigma = 2\mu(T)D(u) - pId_3 \\ \operatorname{div}(u) = 0 \\ C_v(T)\dfrac{\partial T}{\partial t} = 2\mu(T)D(u).D(u) + \operatorname{div}(K(T)\nabla T) + R(T). \end{cases} \tag{1.63}$$

Régime d'écoulement stationnaire, non isotherme pour un fluide Navier-Stokes homogène

Nous cherchons des équations qui décrivent le comportement du fluide indépendamment du temps, c'est-à-dire on chercher

$$p(x,t) = p(x), \qquad T(x,t) = T(x), \qquad u(x,t) = u(x)$$

tel que

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma) + f = 0 \\ \sigma = 2\mu(T)D(u) - pId_3 \\ \operatorname{div}(u) = 0 \\ \operatorname{div}(K(T)\nabla T) + 2\mu(T)D(u).D(u) + R(T) = 0 \end{cases} \tag{1.64}$$

Le cas isotherme, c'est à dire lorsque T = cte, le système (1.64) se ramène

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma) + f = 0 \\ \sigma = 2\mu D(u) - pId_3 \\ \operatorname{div}(u) = 0 \end{cases} \tag{1.65}$$

1.9 Conditions aux limites et initiales

Pour résoudre un problème différentiel, il faut savoire

– les conditions initiales en t = 0 : quelle était la configuration de l'écoulement ?

– les conditions aux limites sur le bord : qu'impose-t-on à l'écoulement ?

Nous ne considérons que de types de frontières à l'interface fluide-solide, ici le bord reste stable (conserve sa configuration) avec le temps, ou peut se déformer très lentement.

Supposons que le fluide soit confiné dans Ω, son bord Γ. Soit n le vecteur normal orienté de Γ.

La vitesse vérifie les deux conditions suivantes

— Condition de non-pénétration : le fluide ne peut pas traverser à la paroi solide, elle se traduit par (qui est imperméable), donc

$$u_n = u.n = 0 \quad \text{sur } \Gamma \tag{1.66}$$

(la composante normale de la vitesse est nulle)

— Condition de non-glissement (d'adhérence) : le fluide adhère à la paroi solide, donc :

$$u_\tau = u.\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \text{ où } \tau \text{ un vecteur tangent à } \Gamma \tag{1.67}$$

(la composante tangentielle doit être nulle)

Remarque 1.9.1 *La condition (1.66) et (1.67) signifie que la vitesse v est nulle à l'interface fluide-solide, i.e*

$$u = 0 \quad sur\,\Gamma \tag{1.68}$$

auquelle la condition rend les équations de Navier-Stokes bien posées.

Remarque 1.9.2 *La condition (1.68) est suffisante pour que les équations d'Euler soient "bien posées".*

Remarque 1.9.3 *Parfois on adopte la condition*

$$u = g \;\; sur\,\Gamma \tag{1.69}$$

Derichlet non homogène la condition d'incompressibilité doit être respectée, i. e.

$$\int\limits_{\Gamma} g(s).n(s)ds = 0 \tag{1.70}$$

d'après la formule de Gauss-Ostrogradsky

Chapitre 2

Travail personnel

2.1 Rappels.

1. L'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} u + u.\nabla \rho = 0 \tag{2.1}$$

2. Les équations du mouvement :

$$\varrho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u \right) = \operatorname{div}(\sigma) + f \tag{2.2}$$

3. L'équation de l'énergie :

$$\varrho C_v(T) \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u.\nabla T \right) = \sigma.D(u) + \operatorname{div}\left(K(T)\nabla T\right) + R(T) \tag{2.3}$$

4. Loi de comportement de fluide Newotenienne

$$\sigma = 2\mu(T)D(u) + \lambda TrD(u)Id_3 - pId_3 \tag{2.4}$$

A savoir que σ est symetrique, nous avons 12 inconnues et 11 équations scalaire en dimension 3.

Les incnnues sont $\varrho, u_i\,(i = 1, 2, 3)\,, \sigma_{ij}\,(i; j = 1, 2, 3)\,, p, T$.

Les données $f,\ \mu, C_v, K, R$.

2.2 Les opérateurs grad, div, rot

Définitions. Soit $D \subset \mathbb{R}^n$, $(n = 2, 3)$, soit $x = (x_1 ... x_n) \in D$.

Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est un champ scalaire, alors le gradient de f est

$$\nabla f\,(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\,(x) \right)_{1 \leq i \leq n}.$$

Si $v : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un champ vectoriel, alors le gradient de v est

$$\nabla v\,(x) = \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\,(x) \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

.

Si $v : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un champ vectoriel, alors la divergence de v est

$$(div\ v)\,(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\,(x)\,.$$

Si $v = (v_1, v_2, v_3) : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est un champ vectoriel, alors la rotation de v est

$$(rot\ v)\,(x) = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} (x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2}\,(x) - \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3}\,(x) \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3}\,(x) - \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1}\,(x) \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}\,(x) - \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}\,(x) \end{pmatrix}.$$

Si $v = (v_1, v_2) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est un champ vectoriel, alors la rotation de v est

$$(rot\ v)(x) = rot\,(v_1, v_2, 0)(x) = \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x).$$

2.3 Ecoulement de fluide unidimensionnel (1D)

Dans cette section, nous allons écrire les équations (2.1)–(2.4) dans le cas d'ecoulement unidimensionnel.

Considérez le mouvement d'un gaz entraîné par un piston et se déplaçant avec une vitesse u dans la direction x- . Nous imaginons un volume de contrôle fixé à l'intérieur du cylindre et supposons des forces corporelles nulles. On considère que le rayon du cylindre est négligeable par rapport à sa longueur, auquel cas on considère $\lambda = 0$ pour un écoulement unidimensionnel. Eq. (2.4) s'ecrit donc

$$\sigma = 2\mu(T)\frac{\partial}{\partial x}(u) - p$$

Nous avons besoin les équations suivantes soient satisfaites.

Equation (2.1) se réduit à

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho u) = 0 \tag{2.5}$$

Equation (2.2) se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho u^2) - 2\mu(T)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \tag{2.6}$$

Equation (2.3) en l'absence de flux de chaleur et de source de chaleur interne, devient dans une dimension

$$\varrho C_v(T)\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x}\right) + p\frac{\partial u}{\partial x} - 2\mu(T)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0$$

En utilisant la relation de conservation de masse, la dernière équation s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho T) + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho T u) + p\frac{\partial u}{\partial x} - 2\mu\,(T)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0. \tag{2.7}$$

Dans les équations eulérienne et lagrangienne, la pression est une fonction de ϱ, e et est déterminée à partir de la loi des gaz parfaits

$$p = \varrho R T \tag{2.8}$$

Par conséquent, en dimension 1, à partir des équations (2.5)– (2.8) on cherche les quatre inconnues $\rho; u; T; p$. Il s'agit un problème bient définit.

Un autre exemple.

En faisant des hypothèses simplificatrices, les équations de Navier peuvent être réduites à une forme plus traitable. Par exemple, nous pouvons réduire les équations de Navier à un problème unidimensionnel en faisant les hypothèses suivantes

1 : coordonnées cartésiennes $x_1 = x\,;\, x_2 = y\,;\, x_3 = z$

2 : $u_1 = u_1(x;t)\,;\, u_2 = u_3 = 0$:

3 : Il n'y a pas de forces corporelles.

4 : Conditions initiales de $u_1(x;0) = 0$ et $\dfrac{\partial}{\partial t}u_1(x;0) = 0$.

5 : Conditions aux limites de type deplacement $u_1(0;t) = f(t)\,;$

où f(t) est une fonction spécifiée. Réduisent les équations de Navier à l'équation d'écoulement unidimensionnelle detype deplacement,

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad \text{où } \alpha^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$$

$$\left(v_1 = \frac{\partial}{\partial t}u_1 \text{ sa vitesse}\right)$$

La solution de cette équation est

$$u_1(x;t) = \begin{cases} f(t-\frac{x}{\alpha}), & \text{x} \leq \alpha t \\ 0, & \text{x} > \alpha t \end{cases}$$

Le tenseur des contraintes $\sigma = \sigma_{11}$ associée à ce déplacement est déterminée à partir (2.4)

$$\sigma_{11} = (\lambda + \mu)\, d_{11} = (\lambda + \mu)\, \frac{\partial u_1}{\partial x}$$

alors le tenseur des contraintes

$$\sigma_{11}(x;t) = \begin{cases} -\frac{\lambda+\mu}{\alpha} f'(t-\frac{x}{\alpha}), & \text{x} \leq \alpha t \\ 0, & \text{x} > \alpha t \end{cases}$$

Ici, il y a une discontinuité dans le tenseur des contraintes à l'interface à $x = \alpha t$.

(Les détails des étapes de preuve sont laissés comme un travail personnel)

2.4 Exercices

Exercice 1 On rappelle que un champ vectoriel est tout application de la forme

$v = (v_1, ...v_n) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n;$

$x = (x_1, ...x_n) \in D \to v\,(x) = (v_1\,(x)\,, ...v_n\,(x))\,.$

On rappelle que un champ scalaire est tout fonction,

$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R};$

$x = (x_1, ...x_n) \in D \to f\,(x)$

Vérifier les développements :

– gradient d'un produit de 2 fonctions : ∇(fg)=g∇f+f∇g.

– divergence du produit d'un champ scalaire f et d'un champ vectoriel u :

$$div(fu) = u.\nabla f + f\ divu \ \text{ où } u.\nabla f = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

– divergence du gradient d'une fonction : div (∇f)=Δf, où Δ est l'opérature de l'aplace $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2} f$.

– divergence du rotation d'un champ vectoriel : div (rot v)=0.

– rotation du gradient d'une fonction : rot(∇f)=0.

Exercice 2 On introduit le Lemme de Poincaré. Soient $D \subset \mathbb{R}^3$ simplement connexe et $v : D \to \mathbb{R}^3$ est un champ vectoriel. Alors

$$\exists \phi : D \to \mathbb{R} \ \text{ t.q. } \ v = \nabla \phi \Longleftrightarrow rot\ v = 0.$$

1. Créez une méthode pour déterminer ϕ.

2. Soit $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par $v(x, y, z) = (2xy; x^2 + z; y)$. Montrez que rot v $= 0$ puis déterminez ϕ t.q. $v = \nabla \phi$.

Exercice 3 On considère le champ de vitesse dans un espace tridimensionnel cartésien $v = (x^2y; 2xy^2; yz^3)$. '

1. Décrivez le tenseur de déformation associé à ce champ de vitesse.

2. Calculez la vitesse de rotation du fluide au point $(-2, -1, +2)$.

Exercice 4 *Ecoulement bidimensionnel (2D)*

Supposons λ, $\mu = 0$ pour que le fluide soit parfait ou non visqueux. Utilisez les résultats (2.1)– (2.4) et faites les hypothèses supplémentaires suivantes :

H1 La densité est constante (Ne dépend pas de x ni de t)

H2 Les forces du corps sont nulles

H3 Un ecoulement stable ou stationnaire (i.e. Ne dépend pas de t)

H4 Un ecoulement non isotherme

H5 Seul le flux bidimensionnel (2D) dans le plan x-y est considéré tel que $u_1(x_1; x_2), u_2 = u_2(x_1; x_2)$ où u=(u_1, u_2) sont les composantes physiques de la vitesse du fluide.

(a) Utiliser les hypothèses $(H1)$–$(H5)$, simplifier les équations (2.1)– (2.4) et vérifier les résultats

$$\begin{aligned} u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x_1} &= 0; \\ u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x_2} &= 0; \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned}$$

(b) Supposons que le flux soit irrotationnel, c'est-à-dire rot$(u_1, u_2) = 0$. Montrer que cette hypothèse conduit aux résultats

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0 \ \text{ et } \frac{1}{2}\left(u_1^2 + u_2^2\right) + \frac{1}{\varrho}p = \operatorname{cons\,tan\,t}.$$

Exercice 5

Pour un écoulement bidimensionnel (2D) stable et non isotherme d'un fluide newtonien isotrope et incompressible, vérifiez que les équations d'équilibre dans un plan $x_1 O x_2$ sont

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial p}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \\ \sigma_{ij} = 2\mu d_{ij}(u) \quad \text{i,j=1,2} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

où $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1,2}$ un tenseur des contraintes, $u = (u_i)_{i=1,2}$ est champs de vitesse, p est la pression et μ est le coffecient de viscosité. Le symbole $\delta_{ij} = 1$ si i=j, sinon $\delta_{ij} = 0$. Déterminer le nombre d'équations et d'inconnues.

Exercice 6

Supposons que le milieu décrite par les équations (2.9) soit à l'hypothèse de contrainte de contraintes $\sigma_{12} = 0$.

a. Trouvez les composantes de déformation d_{11}, d_{22} et d_{12}.

b. Trouvez le champ de vitesse $u_1 = u_1(x_1; x_2)$, $u_2 = u_2(x_1; x_2)$ et la pression $p = p(x_1; x_2)$.

Exercice 7

Supposons un milieu bidimesionnelle (2d) occupant le plan infinit x_1Ox_2 caractérisé par la loi

$$\sigma_{ij} = 2\mu d_{ij}(u) + \lambda \operatorname{div}(u)\delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq 2$$

A partir les hypothèses de contraintes $\sigma_{22} = \varphi$ (fonction) et $\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0$, trouvez les composantes de déformation d_{11}, d_{22} et d_{12}. Trouvez le champ de vitesse $u_1 = u_1(x_1; x_2)$, $u_2 = u_2(x_1; x_2)$.

Exercice 8

Meme questiondu exercice 7. pour les hypothèses de contraintes $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \varphi$ et $\sigma_{12} = 0$.