Question de cours:

1) 2pts

2) 2pts

Exercise 01

Test d'indépendance : 1pt

Deux variables qualitatives mesurées simultanément sur un échantillon de taille n=141.

Variable X : « Produit consommé » à deux modalités « Chimiothérapie, Radiothérapie ».

Variable Y : « Guérison » à deux modalités «Guérison, Pas de Guérison »

On premier lieu, on applique un test d'indépendance de khi-deux pour discuter la liaison entre Chimiothérapie et le traitement de Cancer ou pas.

Tableau des effectifs observés : 0.5pt

	Chimiothérapie	Radiothérapie	Totale
Guérison	10	29	39
Pas de Guérison	75	27	102
Totale	85	56	141

1. Choix des hypothèses : 0.5pt

$H0$: Chimiothérapie n'influe pas sur le traitement d'un Cancer post-opératoire. (Elles sont indépendantes)

$H1$: Chimiothérapie influe sur le traitement d'un Cancer post-opératoire (liées).

2. Calcul des effectifs théoriques :

$$k = 2 \quad i = \overline{1,2}$$
$$l = 2 \quad j = \overline{1,2}$$

$$n_{i.} = \sum_{j=1}^{2} O_{ij} \qquad n_{.j} = \sum_{i=1}^{2} O_{ij} \qquad N = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} O_{ij} \quad A_{ij} = \frac{n_{i.}n_{.j}}{N}$$

1pt

	Chimiothérapie		Radiothérapie		Total $n_{i.}$
	O_{ij}	A_{ij}	O_{ij}	A_{ij}	
Guérison	10	23.5	29	15.5	39
Pas de Guérison	75	61.5	27	40.5	102
Total $n_{.j}$	85		56		141

1.5pts

Condition de validité de test :

$$A_{ij} \geq 5$$

3. **La statistique de test :**

$$T_0 = \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_{ij}-A_{ij})^2}{A_{ij}} = \mathbf{26.97}$$

1pt

4. **Le seuil critique :**

$$1-\alpha = 0.95 \qquad v = (k-1)(l-1) = 1 \qquad alors \qquad \chi^2_{1;0.95} = 3.841$$

5. **Décision :** $T_0 > \chi^2_{1;0.95}$

1pt

Décision statistique : On rejetteH_0.

Décision Pratique :On accepte H1 → Chimiothérapie influe sur le traitement d'un Cancer post-opératoire (liées). 0.5pt

Exercise 02

1) $C_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$,

Les moyennes : $\overline{C_1} = \overline{X}_1 = \frac{8+6+4}{3} = 6$ et $\overline{C_2} = \overline{X}_2 = \frac{5+7+0}{3} = 4$

Center les variables $(x_{ij} - \overline{x}_j)$:

4-6=-2	5-4=1
6-6=0	7-4=3
8-6=2	0-4=-4

2pts

Leur normes (écart-types σ_{Xi_i}) :

$$\|C_1\| = \sigma_{X1} = \sqrt{\frac{1}{3}[(-2)^2 + (2)^2]} = \sqrt{\frac{1}{3}[4+4]} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

et $$\|C_2\| = \sigma_{X2} = \sqrt{\frac{1}{3}[1^2 + 3^2 + (-4)^2]} = \sqrt{\frac{26}{3}}$$

$$\overline{Y}_1 = \overline{C}_1^* = 0 \qquad \text{et} \qquad \overline{Y}_2 = \overline{C}_2^* = 0$$

Leur normes (écart-types σ_{Xi_i}) :

$$\|C_1\| = \sigma_{X1} = \sqrt{\frac{1}{3}[(-2)^2 + (2)^2]} = \sqrt{\frac{1}{3}[4+4]} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

et $$\|C_2\| = \sigma_{X2} = \sqrt{\frac{1}{3}[1^2 + 3^2 + (-4)^2]} = \sqrt{\frac{26}{3}}$$

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{-2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{26}} \\ 0 & \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{26}} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{-4\sqrt{3}}{\sqrt{26}} \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad y_{ij} = \frac{x_{ij} - \overline{x}_j}{\sigma_{X_i}}$$

2) $R = \frac{Cov\,(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$ **2pts**

$$R=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{26}} & \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{26}} & \frac{-4\sqrt{3}}{\sqrt{26}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{3}{26}} \\ 0 & \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{26}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{-4\sqrt{3}}{\sqrt{26}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-5}{2\sqrt{13}} \\ \frac{-5}{2\sqrt{13}} & 1 \end{pmatrix}$$

Le résultat de ce calcul est la matrice R =V.

3) Valeurs propres de V= R :2pts

$$\det(R-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -0{,}69 \\ -0{,}69 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)^2-(-0{,}69)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda-0{,}69)(1-\lambda+0{,}69)=0$$

$$\Leftrightarrow (0{,}31-\lambda)(1{,}69-\lambda)=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=1{,}69;\lambda_2=0{,}31$$

Ce sont les deux valeurs propres de Γ.

4) Calcul des vecteurs propres associés : 2pts

Pour $\lambda_1=1{,}69$;

$$R\,u_1=\lambda_1 u_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -0{,}69 \\ -0{,}69 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1{,}69\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 0{,}69x_2 = 1{,}69x_1 \\ -0{,}69x_1 + x_2 = 1{,}69x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -0{,}69x_1 - 0{,}69x_2 = 0 \\ -0{,}69x_1 - 0{,}69x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -x_2$$

Donc $F_{\lambda 1} = \{(x_1, -x_1) / x_1 \in IR\} = \{x_1(1,-1) / x_1 \in IR\}$

$F_{\lambda 1}$ est un espace vectoriel de dimension 1 (c'est une droite vectoriel, un axe, le

$$\begin{pmatrix} 1 & -0{,}69 \\ -0{,}69 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0{,}31 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 0{,}69x_2 = 0{,}31x_1 \\ -0{,}69x_1 + x_2 = 0{,}31x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}69x_1 - 0{,}69x_2 = 0 \\ -0{,}69x_1 + 0{,}69x_2 = 0 \end{cases}$$

$F_{\lambda 2}$ est un espace vectoriel de dimension 1 (c'est un droite vectoriel, deuxième axe principal).

Jn vecteur unitaire de $F_{\lambda 2}$

$$\|u_2\| = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1.$$

2pts

$u_1.u_2 = 0 \Rightarrow \{u_1, u_2\}$ est une base orthonormée.