Université d'ELOUED

Faculté de sciences exactes

Département d'Informatique *Master 1 Informatique*

Durée 01h30mn *Date 09/01/2024*

Contrôle du module logique mathématiqe

Exercice 1 (2pts)

Montrer, que P est une conséquence logique de la formule $F = (P \vee (Q \wedge R)) \wedge (Q \rightarrow \neg R)$ $(F \models P)$.

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$Q \rightarrow \neg R$	F
0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	**1**
1	0	1	0	1	1	**1**
1	1	0	0	1	1	**1**
1	1	1	1	1	0	0

Exercice 2 (5pts)

Soit $(P \Delta Q) \equiv (\neg P \wedge \neg Q)$.

Montrer que l'ensemble $\{\Delta\}$ est système complet de connecteurs en exprimant les autres connecteurs : $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ et $\leftrightarrow$ en fonction de $\{\Delta\}$

- $\neg P \equiv P \Delta P$
- $P \wedge Q \equiv (P \Delta P) \Delta (Q \Delta Q)$
- $P \vee Q \equiv (P \Delta Q) \Delta (P \Delta Q)$
- $P \rightarrow Q \equiv ((P \Delta P) \Delta Q) \Delta ((P \Delta P) \Delta Q)$
- $P \leftrightarrow Q \equiv ((P \Delta P) \Delta Q) \Delta ((Q \Delta Q) \Delta P)$

Exercice 3

1. En utilisant le tableau sémantique montrer que la formule

F1 = P→ ((Q→ R)→ ((Q→ R)→ (P→Q))→ R) est tautologie **(2.5 pts)**

on montre que ¬F1 est non satisfiable:

V : ¬F1

F: F1

V: P
F: ((Q→ R)→ ((Q→ R)→ (P→Q))→ R)

V: (Q→ R)
F: ((Q→ R)→ (P→Q))→ R)

F: Q V:R

V: (Q→ R) V: (Q→ R)
F: (P→Q)→ R F:(P→Q)→ R

F: Q V:R F: Q V:R

V: (P→Q) V: (P→Q) V: (P→Q) V: (P→Q)
F: R F: R F: R F: R

F: P

¬F1 est non satisfiable alors F1 est tautologie

2. En utilisant la méthode de résolution propositionnelle, démontrer que la formule suivante est non satisfiable
F2 = (A → B) ∧ (¬A → (B ∨ C)) ∧ (¬C → ¬B) ∧ ((B ∧ C) → ¬A) ∧ (C → A). **(2.5 pts)**

Forme clausale de F2

F2 = (¬A ∨ B) ∧ (A ∨ B ∨ C) ∧ (C ∨ ¬B)∧(¬B ∨ ¬C ∨ ¬A) ∧(¬C ∨ A)

C 1 = ¬A ∨ B

C 2 = A ∨ B ∨ C

C 3 = C ∨ ¬B

C 4 = ¬B ∨ ¬C ∨ ¬A

C 5 = ¬C ∨ A

A partir de cela, on obtient

$C\ 6 = B \vee C$ Res(C 1 , C 2)

$C\ 7 = C$ Res(C 3 , C 6)

$C\ 8 = \neg C \vee \neg A$ Res(C 1 , C 4)

$C\ 9 = \neg C$ Res(C 5 , C 8)

$C\ 10 = \square$ Res(C 7 , C 9)

Donc $F2 \models \square$ d'oùF2 non satisfiable

3. En utilisant la règle d'inférence Modus Ponens montrer les proposition suivantes

- $A\rightarrow B, B\rightarrow C \vdash A\rightarrow C$ **(2.5pts)**
- $\vdash (Q\rightarrow R)\rightarrow((P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R))$ sans utiliser le théorème de déduction **(2.5 pts)**

- $A\rightarrow B, B\rightarrow C \vdash A\rightarrow C$

S1: $A\rightarrow B$
S2: $B\rightarrow C$
S3: $(A\rightarrow(B\rightarrow C)) \rightarrow ((A\rightarrow B) \rightarrow (A\rightarrow C))$ Axiome2
S4: $(B\rightarrow C) \rightarrow (A\rightarrow(B\rightarrow C))$ Axiome1
S5: $(A\rightarrow(B\rightarrow C))$ MP(S2,S4)
S6: $((A\rightarrow B) \rightarrow (A\rightarrow C))$ MP(S3,S5)
S7: $(A\rightarrow C)$ MP(S1,S6)

$\vdash (Q\rightarrow R)\rightarrow((P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R))$

S1: $(P\rightarrow(Q\rightarrow R))\rightarrow((P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R))$ Axiome2

S2: $(Q\rightarrow R) \rightarrow (P\rightarrow(Q\rightarrow R))$ Axiome1

S3: $(Q\rightarrow R)\rightarrow((P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R))$ Transition Question précédente

Exercice 4

Soit E l'ensemble des formules {α1 , α2 } où
α1 : $\forall x \exists y P (x, y)$;
α2 : $\exists y P (x, y)$;
Pour chacune des formules α1 , α2, trouver un modèle.
Pour α1 : Nous proposons l'interprétation I1 de domaine de base D1 = N, et on définit le prédicat P : " ≤ ". Avec cette interprétation, on a : $\alpha 1 \equiv \forall x \exists y\ (x \leq y)$. On a les deux variables x et y sont liées.

On constate que α 1 est satisfaite tout le temps car pour tout entier, on peut lui trouver un entier qui lui soit supérieur, c'est à dire α 1 est satisfaite pour toutes les valuations de I1 , ainsi I1 est un modèle, (i.e. I $\models \alpha$ 1).

Pour α3 : Nous proposons l'interprétation I2 de domaine de base D2 = {2, 4, 6, 8}, et on définit le prédicat P (x, y) : "x diviseur de y". Donc, pour cette interprétation on a : $\alpha2 \equiv \exists y$, x est un diviseur de y. On a la variable x est libre et la variable y est liée.

On constate que pour toutes les valuations possibles de x, la formule $\alpha2$ est satisfiable, donc I2 est un modèle de $\alpha2$ (i.e. I2 $\models \alpha2$).

Bon courage