Exercice 01 :

Solution :

1) Ce pbm admet un plan optimal $\Rightarrow \boxed{\sum a_i = \sum b_j} \Rightarrow 20+30+50 = 40+25+35 = \boxed{100}$ 0,5

2) Plan basique initial par CNO :

	B1	B2	B3	ai
A1	4 (20)	2	3	20
A2	5 (20)	3 (10)	1	30
A3	1	4 (15)	2 (35)	50
bj	40	25	35	100

1

* Plan initiale : $X = \{x_{11}, x_{21}, x_{22}, x_{32}, x_{33}\}$

0,25 $\boxed{X = \{20, 20, 10, 15, 35\}}$

* $Z = 20\times4 + 20\times5 + 10\times3 + 15\times4 + 35\times2$

$\boxed{Z = 340}$ 0,25

③ Plan de transport optimal : $\boxed{c_{ij} = U_i + V_j}$ et $\boxed{D_{ij} = c_{ij} - (U_i + V_j)} = ?$ 1,5

	B1	B2	B3	ai	Ui
A1	4 (20)	2 / 0	3 / 3	20	0
A2	5 (20) −	3 (10) +	1 / 0	30	1
A3	1 / −5 +	4 (15) −	2 (35)	50	2
bj	40	25	35	100	
Vj	4	2	0		

* $Z = 20\times4 + 5\times5 + 25\times3 + 15\times1 + 35\times2 = \boxed{265}$
* $\theta = \min(5, 35) = 5$; $\boxed{VS = x_{21}}$ 1,5

* $D_{31} = -5 < 0$ Alors : $VE = x_{31}$ et $\theta = \min(20, 15)$ 1,5

$VS = x_{32}$

	B1	B2	B3	ai	Ui
A1	4 (20)	2 / 0	3 / −2	20	0
A2	5 (5) −	3 (25)	1 / −5 +	30	1
A3	1 (15) +	4 / 5	2 (35) −	50	−3
bj	40	25	35	100	
Vj	4	2	5		

* $D_{13} = -2$
* $D_{23} = -5$

Max $|D_{13}|$ et $|D_{23}|$ $= 5$ Alors $\boxed{VE = x_{23}}$

	B1	B2	B3	ai	Ui
A1	4 (20) −	2 / −5 +	3 / −2	20	0
A2	5 / 5	3 (25) −	1 (5) +	30	−4
A3	1 (20) +	4 / 0	2 (30) −	50	−3
bj	40	25	35	100	
Vj	4	7	5		

* $D_{12} = -5$
* $D_{13} = -2$

Max = 5

$\boxed{VE = x_{12}}$

$\theta = \min(20, 25, 30) = 20$

$\boxed{VS = x_{11}}$

$Z = 20\times4 + 25\times3 + 20\times1 + 30\times2 + 5\times1 = \boxed{240}$

	B1	B2	B3	ai	Ui
A1	4 / 5	2 (20)	3 / 3	20	0
A2	5 / 5	3 (5)	1 (25)	30	1
A3	1 (40)	4 / 0	2 (10)	50	2
bj	40	25	35	100	
Vj	−1	2	0		

1

Z = le critère d'optimalité est satisfait, c'est la solution optimale $\Rightarrow$

↳ tous les $D_{ij} \geq 0$ Alors : 0,25

Plan optimal : $X^* = \{x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}\} = \{20, 5, 25, 40, 10\}$ 0,25

$Z^* = 20\times2 + 5\times3 + 25\times1 + 40\times1 + 10\times2 = \boxed{140}$

④ Plan basique initial par EM:

	B1	B2	B3	ai
A1	4	2 (20)	3	20
A2	5	3	1 (30)	30
A3	1 (40)	4 (5)	2 (5)	50
bj	40	25	35	100

1

$Z = 20\times2 + 30\times1 + 40\times1 + 5\times4 + 5\times2$
$= \boxed{140}$ 0,25

⑤ Oui, $\boxed{Z^*_{CNO} = Z^*_{EM} = 140}$ 0,75

Exercice 02 :

① PL :
$$\begin{cases} \text{Min } Z = 2x_1 + 6x_2 \\ 3x_1 + x_2 \geq 4 \\ 2x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ (x_1, x_2) \geq 0 \end{cases}$$
2

$\Longrightarrow$

② PLD : Max $W = 4y_1 + 6y_2 + 12y_3$
$$\begin{cases} 3y_1 + y_3 \leq 2 \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 6 \\ (y_1, y_2, y_3) \geq 0 \end{cases}$$
2

③ Solution optimale du PLD $\Rightarrow$ Par Simplexe :

A) Forme Standard :

Max $W = 4y_1 + 6y_2 + 12y_3 + 0e_1 + 0e_2$
$$\begin{cases} 3y_1 + y_3 + e_1 = 2 \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 + e_2 = 6 \\ (y_1, y_2, y_3, e_1, e_2) \geq 0 \end{cases}$$
1

B) SBR init ?

VB : $(e_1, e_2) = (2, 6)$

VHB : $(y_1, y_2, y_3) = (0, 0, 0)$ 1

SBR init : $(y_1, y_2, y_3, e_1, e_2) = (0, 0, 0, 2, 6) \geq 0$

Alors W admet SBR init

C) 1er tab : 0,5

VB	y_1	y_2	y_3	e_1	e_2	b
e_1	3	0	1	1	0	2
e_2	1	2	2	0	1	6
-W	4	6	12	0	0	0

D: 2ième tab 1

VB	y_1	y_2	y_3	e_1	e_2	b
y_3	3	0	1	1	0	2
e_2	-5	2	0	-2	1	2
-W	-32	6	0	-12	0	-24

E) 3ième tab 0,75

VB	y_1	y_2	y_3	e_1	e_2	b
y_3	3	0	1	1	0	2
y_2	$-\frac{5}{2}$	1	0	-1	$\frac{1}{2}$	1
-W	-17	0	0	-6	-3	-30

* tous les coûts ≤ 0 Alors $W^* = 30$ et $\begin{cases} y_1^* = 0 \\ y_2^* = 1 \\ y_3^* = 2 \end{cases}$

④ $Z^* = W^* = 30$ $-x_1 - x_2$ et $\begin{cases} x_1^* = 6 \\ x_2^* = 3 \end{cases}$ 0,25

⑤ Théorème des écart complémentaire : $y^*((Ax^*)_i - b_j) = 0$? 0,5

$\Rightarrow 0 * (3(6) + 3 - 4) = 0$ ✓

$\Rightarrow 1 * (2(3) - 6) = 0$ ✓

$\Rightarrow 2 * (6 + 2(3) - 12) = 0$ ✓

0,5

$\Rightarrow 6 * (3(0) + 2 - 2) = 0$ ✓

$\Rightarrow 3 * (0 + 2(1) + 2(2) - 6) = 0$ ✓

0,5

$\Rightarrow$ tous les équations sont égale à $\boxed{0}$ Alors $X^* = \binom{6}{3}$ et $y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont des solutions optimales pour PLP et PLD.

CamScanner