جامعة الشهيد حمه لخضر -الوادي- السنة الدراسية : 2025/2024

كلية العلوم الدقيقة المستوى : سنة ثانية إعلام آلي - السداسي الثالث

قسم الإعلام الآلي المدة: 1 سا و 30 د

تصحيح امتحان السداسي الأول في مادة الطرق العددية

حل التمرين الأول:

1- $x^* = 1.46$ 0,25

2- $y^* = 4.33$ 0,25

3- $E_x = |x - x^*| = |1.4567 - 1.46| = 0.0033$ 0,25

$E_y = |y - y^*| = |4.3376 - 4.33| = 0.0076$ 0,25

الأرقام المهمة الدقيقة: لدينا

$$E_x = |x - x^*| = 0.0033 = 0.33 \times 10^{-2} \leq 0.5 \times 10^{-2} \leq 0.5 \times 10^{-1}$$ 0,25

بالتالي الأرقام 6 و 4 و 1 كلها مهمة ودقيقة. 0,25

$$E_{\mathrm{y}} = |y - y^*| = 0.0076 > 0.5 \times 10^{-2}$$

أي الرقم 3 الثاني بعد الفاصلة ليس مهم ودقيق. 0,25

لكن الرقم 3 بعد الفاصلة مباشرة مهم ودقيق وكذلك الرقم 4 لأن

$$E_{\mathrm{y}} = |y - y^*| = 0.0076 \leq 0.5 \times 10^{-1}.$$ 0,25

4- حساب $\Delta(x/y)$: لدينا

$$\Delta(x/y) = \frac{x}{y}\left(\frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta y}{y}\right) = \frac{1.4567}{4.3376}\left(\frac{0.0033}{1.4567} + \frac{0.0076}{4.3376}\right) = 0.0013$$ 1

حل التمرين الثاني:

1- الشكل المصفوفي :
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$ 1

2- التحليل LU:

$$A^{(2)} = M^{(1)}A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

0,25 0,25

1 ن

$$A^{(3)} = M^{(2)}A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ 0,25 0,25

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ 1

محدد المصفوفة A: $\det(A) = \det(L) \times \det(U) = 1 \times \left(2 \times 1 \times (-1)\right) = -2$ 0,25

نستنتج أن الجملة تقبل حل وحيد. 0,25

حل الجملة $AX = b \Leftrightarrow LUX = b$. نضع $UX = Y$. 0,25

أولا نقوم بحل الجملة: $LY = b$: 0,25

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$ 0,25

من المعادلة الأولى $y_1 = 5$, من المعادلة الثانية $2y_1 + y_2 = 6 \Leftarrow y_2 = 6 - 2y_1 = -4$ ومن المعادلة الثالثة
$-y_1 + 2y_2 + y_3 = -3 \Leftarrow y_3 = -3 + y_1 - 2y_2 = 10$ 0,25

ثم نقوم بحل الجملة $UX = Y$: 0,25

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 10 \end{bmatrix}$$ 0,25

من المعادلة الثالثة $x_3 = -10$, من المعادلة الثانية $x_2 + x_3 = -4 \Leftarrow x_2 = -4 - x_3 = 6$ ومن المعادلة الأولى $2x_1 +$
$x_2 - x_3 = 5 \Leftarrow x_1 = (5 - x_2 + x_3)/2 = -5.5$

أي حل الجملة هو $(x_1, x_2, x_3) = (-5.5\,; 6\,;\ -10)$. 0,25

حل التمرين الثالث:

1- الشكل التكراري لجاكوبي : من أجل $X^{(0)} = (0,0,0)$:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \left(15 - x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}\right)/10, \\ x_2^{(k)} = \left(24 - x_1^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}\right)/10, \\ x_3^{(k)} = \left(33 - x_1^{(k-1)} - x_2^{(k-1)}\right)/10. \end{cases}$$ 1

الشكل التكراري لغوص-صيدال: من أجل $X^{(0)} = (0,0,0)$:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \left(15 - x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}\right)/10, \\ x_2^{(k)} = \left(24 - x_1^{(k)} - x_3^{(k-1)}\right)/10, \\ x_3^{(k)} = \left(33 - x_1^{(k)} - x_2^{(k)}\right)/10. \end{cases}$$ 1.

2 4p

2- من أجل $X^{(0)} = (0\,,0\,,0)^t$ وباستعمال الشكل التكراري لجاكوبي نجد :

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \left(15 - x_2^{(0)} - x_3^{(0)}\right)/10 = 1.5000 \\ x_2^{(1)} = \left(24 - x_1^{(0)} - x_3^{(0)}\right)/10 = 2.4000 \\ x_3^{(1)} = \left(33 - x_1^{(0)} - x_2^{(0)}\right)/10 = 3.3000 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^{(2)} = \left(15 - x_2^{(1)} - x_3^{(1)}\right)/10 = 0.9300 \\ x_2^{(2)} = \left(24 - x_1^{(1)} - x_3^{(1)}\right)/10 = 1.9200 \\ x_3^{(2)} = \left(33 - x_1^{(1)} - x_2^{(1)}\right)/10 = 2.9100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \left(15 - x_2^{(2)} - x_3^{(2)}\right)/10 = 1.0170 \\ x_2^{(3)} = \left(24 - x_1^{(2)} - x_3^{(2)}\right)/10 = 2.0160 \\ x_3^{(3)} = \left(33 - x_1^{(2)} - x_2^{(2)}\right)/10 = 3.0150 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^{(4)} = \left(15 - x_2^{(3)} - x_3^{(3)}\right)/10 = 0.9969 \\ x_2^{(4)} = \left(24 - x_1^{(3)} - x_3^{(3)}\right)/10 = 1.9968 \\ x_3^{(4)} = \left(33 - x_1^{(3)} - x_2^{(3)}\right)/10 = 2.9967 \end{cases}$$

3- نلاحظ أن القيم تتقارب نحو الحل $X = (1,2,3)$ ونستطيع التأكد فعلا انه حل حقيقي للجملة.

حساب الخطأ:

$$X - X^4 = (1 - 0.9969\ ;\ 2 - 1.9968\ ;\ 3 - 2.9967\ ) = (0.0031\ ;\ 0.0032\ ;\ 0.0033)$$

$$Erreur = \|X - X^4\|_\infty = 0.0033.$$