1) إثبات أن φ خطي يا ثنائية متناظرة $\varphi(P, Q)$

$\forall\, P, Q, S \in \mathbb{R}_n[X]$

$$\varphi(P+\lambda S, Q) = \int_{-1}^{1} (P+\lambda S)(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, dt + \lambda \int_{-1}^{1} S(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, dt$$

$$= \varphi(P, Q) + \lambda \varphi(S, Q) \quad \ldots (1)$$

$$\varphi(P, \lambda S+Q) = \int_{-1}^{1} P(t)\, (\lambda S+Q)(t)\, e^{-t}\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} P(t)\, \lambda S(t)\, e^{-t}\, dt + \int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, dt$$

$$= \lambda \varphi(P, S) + \varphi(P, Q) \quad \ldots (2)$$

من (1) و (2) أن φ ثنائية خطية

2) $\varphi(P, P) \geq 0$

$$\varphi(P, P) = \int_{-1}^{1} P^2(t)\, e^{-t}\, dt$$

نعلم أن $e^{-t} > 0$ على المجال $[-1, 1]$ ومنه

ومنه $P^2(t)\, e^{-t} \geq 0 \Rightarrow P^2(t) \geq 0$ مهما يكن $P(t)$

ومنه على المجال $[-1, 1]$ فإن $\varphi(P, P) \geq 0$

3) $\varphi(P, P) = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} P^2(t)\, e^{-t}\, dt = 0$

بما أن $e^{-t} \neq 0$

$\forall t \in [-1, 1] \Rightarrow e^{-t} \neq 0 \Rightarrow P^2(t) = 0$

$\Rightarrow P(t) = 0$ φ معرفة جيداً

ومنه φ جداء سلمي في $\mathbb{R}_n[X]$.

$\langle x+y, x+y\rangle = \|x+y\|^2$. لدينا: 3-

$\frac{4}{4}$

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle.$$

$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$$

-4- تابع إجابة لـ جبر

1) $\forall\, X, Y \in \mathbb{R}^3$

$f(X, Y) = X^t A Y$

$f(X, Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + 2 x_3 y_3 + 2 x_1 y_2 + 2 x_2 y_1 - 2 x_2 y_3$
$\quad - 2 x_3 y_2$

2) بشكل تربيعي =

$q(X) = X^t A X$

$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2 x_3^2 + 4 x_1 x_2 - 4 x_2 x_3$

3) مختصر غوس

$q(X) = x_1^2 + 4 x_1 x_2 + x_2^2 + x_3^2 - 4 x_2 x_3$

$q(x) = (x_1 + 2x_2)^2 - 4x_2^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4 x_2 x_3$

$= (x_1 + 2x_2)^2 - 3\left(x_2^2 + \frac{4}{3} x_2 x_3\right) + 2x_3^2$

$= (x_1 + 2x_2)^2 - 3\left(x_2 + \frac{2}{3} x_3\right)^2 + \frac{12}{9} x_3^2 + 2 x_3^2$

$= (x_1 + 2x_2)^2 - 3\left(x_2 + \frac{2x_3}{3}\right)^2 + \frac{10}{3} x_3^2 .$

3) $\begin{cases} l_1(x) = x_1 + 2x_2 \\ l_2(x) = 3x_2 + 2x_3 \\ l_3(x) = x_3 \end{cases}$ $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

$\{l_3, l_2, l_1\}$ مستقلة خطياً

فهي أساس لـ $(\mathbb{R}^3)^*$

4) $\text{rang}\ q = 3$

5) $\text{Sign}\ q = (2, 1)$