مقياس تحليل1	جـــــامعة الــوادي	قسم الاعلام الآلي
2024/2023	كلية العلوم الدقيقة	سنة أولى ليسانس

تصحيح امتحان الدورة العادية

الاسم واللقب: / فوج رقم: /

التمرين الأول: (نقطة ونصف لكل سؤال) لنعرف الدالة العددية f على $\mathbb{R}^*$ كما يلي $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}$.

1. التحقق أن الدالة $g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ هي تمديد الدالة f بالاستمرار على $\mathbb{R}$.

لدينا $\forall x \in \mathbb{R}^*\ g(x) = f(x)$ ولدينا $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ وكذلك $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

ومنه $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ وعليه f تقبل تمديدا بالاستمرار على $\mathbb{R}$ والدالة الممددة لها هي g .

2. اثبات أن المجموعة $A = \{g(x),\ x \in \mathbb{R}\}$ محدودة ثم تعيين حديها الأعلى والأدنى.

لدينا $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ 0 < e^{-\frac{1}{|x|}} < 1$ اي ان $\forall x \in \mathbb{R}^*, 0 < g(x) < 1$ وبما ان $g(0) = 0$ اذن $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq g(x) < 1$.

ومنه A محدودة وبما ان $0 \in A$ و $\lim_{x\to\infty} g(x) = 1$ ومنه $supA = 1$ و $infA = 0$.

3. تبيان أن الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ثم تعيين دالتها المشتقة $g^\backslash$.

واضح أن الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ لندرس قابلية اشتقاقها عند 0 , لدينا

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{X\to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0\ ,\quad \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = -\lim_{X\to -\infty} \frac{-X}{e^{-X}} = 0$$

ومنه g تقبل الاشتقاق عند الصفر و $g^\backslash(0) = 0$ ولدينا $\forall x > 0,\ g^\backslash(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}},\ \forall x < 0, g^\backslash(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

وبالتالي

$$g^\backslash(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

4. تبيان أن $g \in C^1(\mathbb{R})$.

واضح أن $g^\backslash$ مستمرة على $\mathbb{R}^*$ لنبين أن $g^\backslash$ مستمرة عند 0 , لدينا

$$\lim_{x\to 0^+} g^\backslash(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{X\to +\infty} \frac{X^2}{e^X} = 0 = g^\backslash(0),\quad \lim_{x\to 0^-} g^\backslash(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = -\lim_{X\to -\infty} \frac{(-X)^2}{e^{-X}} = 0 = g^\backslash(0),$$

ومنه $g^\backslash$ مستمرة عند الصفر وبالتالي فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ وعليه فان $g \in C^1(\mathbb{R})$.

التمرين الثاني: (نقطة واحدة على كل تساؤل) لنكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة التالية $f(x) = ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

1. تبيان أن f فردية ثم حساب نهاياتها عند أطراف مجال تعريفها.

لدينا $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2+1}) = \ln\left(\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = -ln(x+\sqrt{x^2+1}) = -f(x)$

ومنه f فردية. ولدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} ln(x+\sqrt{x^2+1}) = +\infty$

وبما أن f فردية فان $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x) = -\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

2. اثبات أن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

لدينا f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\forall x \in \mathbb{R},\ f^\backslash(x) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$ ومنه f متزايدة تماما.

3. تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على $\mathbb{R}$.

بما أن الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على $\mathbb{R}$.

4. تبيان أن الدالة f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال يطلب تحديده ثم نعين دالتها العكسية f^{-1}.

بما أن الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ اذن فهي تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[=]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)[$.

لنعين f^{-1} , لدينا $\forall x \in \mathbb{R}, f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \ln(y + \sqrt{y^2+1}) = x \Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2+1}$

$\Leftrightarrow e^x - y = \sqrt{y^2+1} \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x + y^2 = y^2 + 1 \Leftrightarrow y = \frac{e^{2x}-1}{2e^x}$

ومنه $\forall x \in \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \frac{e^{2x}-1}{2e^x}$

5. بتطبيق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة ln, أ. تبيان أن $\forall n \in \mathbb{N}^*\ ln(n+1) - ln(n) < \frac{1}{n}$

الدالة ln مستمرة وقابلة للاشتقاق على المجال $]n, n+1[$ اذن بتطبيق نظرية التزايدات المنتهية نجد ان يوجد $c \in]n, n+1[$ حيث $\frac{ln(n+1)-ln(n)}{1} = ln(n+1) - ln(n) = ln'(c) = \frac{1}{c} < \frac{1}{n}$ لان $n < c < n+1 \Rightarrow \frac{1}{c} < \frac{1}{n}$

ب. استنتاج نهاية المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ حيث $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

لدينا $ln(2) - ln(1) < 1$, $ln(3) - ln(2) < \frac{1}{2}$, $ln(4) - ln(3) < \frac{1}{3}$ وهكذا الى غاية $ln(n+1) - ln(n) < \frac{1}{n}$

نجمع المتباينات السابقة طرفا لطرف نجد $ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ ومنه $ln(n+1) < U_n$

وبما ان $\lim_{n\to+\infty} ln(n+1) = +\infty$ فحسب العلاقة السابقة نجد $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

التمرين الثالث: (نقطة ونصف لكل سؤال) المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة بالعلاقة التراجعية التالية $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3} \\ u_0 = 0, \end{cases}$

1. برهان بالتراجع أن $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n < 2$.

لدينا $u_0 = 0 < 2$ لنفرض ان $u_n < 2$ ولنبرهن ان $u_{n+1} < 2$, لدينا $u_n < 2 \Leftrightarrow \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3} < \frac{6}{3} = 2 \Leftrightarrow u_{n+1} < 2$ وهو المطلوب.

2. تبيان أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة تماما

لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3} - u_n = \frac{-1}{3}u_n + \frac{2}{3} > 0$ لان $u_n < 2 \Leftrightarrow \frac{-1}{3}u_n + \frac{2}{3} > 0$ ومنه $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة تماما.

بما ان $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة تماما ومحدودة من الاعلى بالعدد 2 اذن فهي متقاربة.

3 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة بالعلاقة $\forall n \in \mathbb{N}\ v_n = u_n - 2$ أ. تبيان أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية.

لدينا $\forall n \in \mathbb{N}\ v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3} - 2 = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}(u_n - 2) = \frac{2}{3}v_n$

ومنه المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية اساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الاول $v_0 = u_0 - 2 = -2$.

ب. كتابة v_n و المجموعين $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ بدلالة n

لدينا $\forall n \in \mathbb{N}\ v_n = v_0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = (-2)\frac{2^n}{3^n} = -\frac{2^{n+1}}{3^n}$

و $S_n = (-2)\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = 6 \times \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1\right) = \frac{2^{n+2}}{3^n} - 6$

اخيرا $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (v_0+2) + (v_1+2) + (v_2+2) + \cdots + (v_n+2) = S_n + 2(n+1) = 2n - 4 + \frac{2^{n+2}}{3^n}$