Université Hamma Lakhdar El Oued
Faculté de sciences exactes
Département de Mathématiques

Correction de l'examen : Espaces Fonctionnels et théorèmes du point fixe

Master Maths 2ème Année

L'examen fait le 26/01/2026

Barème : 0,5 point pour chaque réponse soulignée.

Exercice 1 (05 pts)

1. Soient $x=(x_n), y=(y_n)\in E$ et $\alpha\in\mathbb{R}$. On a $T_n\in E'$ puisque

$$* \ \underline{T_n(x+y)=x_n+y_n=T_n(x)+T_n(y)}. \quad * \ \underline{T_n(\alpha x)=\alpha x_n=\alpha T_n(x)}. \quad * \ \underline{|T_n(x)|=|x_n|\le\left(\sum_{n\ge0}|x_n|^2\right)^{1/2}=\|x\|}.$$

$$\underline{\|T_n\|_{E'}=\sup_{\|x\|\le1}|T_n(x)|=\sup_{\|x\|\le1}|x_n|\le\sup_{\|x\|\le1}\|x\|\le1.}$$

Pour $e_n=(0,\dots,0,1,0,\dots)\in E$, on a $\|e_n\|=1$ et $\underline{T_n(e_n)=1}$, alors $\underline{\|T_n\|_{E'}=1}$.

2. Pour tout $x\in E$ on a $\sum_{n\ge0}|x_n|^2<\infty$ alors $|x_n|^2\to0$ donc $\underline{x_n\to0}$, ou encore $\underline{T_n(x)\to0}$, il résulte que $T_n\to0$ pour la topologie faible-* $\sigma(E',E)$ et comme E est un espace de Hilbert donc il est <u>réflexif</u>, alors $E=E''$ et $T_n\to0$ pour la topologie $\sigma(E',E)=\sigma(E',E'')$.

3. $\|T_n\|_{E'}=1$ alors T_n <u>ne converge pas fortement</u> vers 0.

Exercice 2 (07 pts)

1. Il est clair que $\underline{\varphi\in C^\infty(\mathbb{R})}$ et que pour tout $k\in\mathbb{N}$ il existe un polynôme P_k tel que $\varphi^{(k)}(x)=P_k(x)e^{-\pi x^2}$
Et comme $e^{-\pi x^2}$ décroît plus vite que tout puissance de x, on a pour tout $\underline{m,k\in\mathbb{N}:\sup_{x\in\mathbb{R}}|x^m\varphi^{(k)}(x)|<\infty}$.
Donc $\varphi\in S(\mathbb{R})$. On sait que <u>la transformé de Fourier est un automorphisme</u> de $S(\mathbb{R})$, alors $\hat{\varphi}\in S(\mathbb{R})$.

2. On a $\underline{\cos(2\pi ax)\in C^\infty(\mathbb{R})}$ et toutes ses dérivées sont bornées, alors <u>à croissance lente</u>.
Comme le produit d'une fonction de $S(\mathbb{R})$ par une fonction de $C^\infty(\mathbb{R})$ à croissance lente ainsi toutes Ses dérivées est encore dans $S(\mathbb{R})$, donc $f\in S(\mathbb{R})$.
D'après la formule d'Euler: $\underline{\cos(2\pi ax)=1/2\left(e^{2\pi ax}+e^{-2\pi ax}\right)}$, d'où $f(x)=1/2\left(\varphi(x)e^{2\pi ax}+\varphi(x)e^{-2\pi ax}\right)$.
Comme $\underline{\widehat{\varphi(x)e^{2\pi ax}}(y)=\hat{\varphi}(y-a) \text{ et } \widehat{\varphi(x)e^{-2\pi ax}}(y)=\hat{\varphi}(y+a)}$.
Alors $\hat{f}(y)=1/2\left(\hat{\varphi}(y-a)+\hat{\varphi}(y+a)\right)$.

3. On a $\varphi'(x)=-2\pi xe^{-\pi x^2}=-2\pi x\,\varphi(x)$, donc $\widehat{\varphi'}(y)=-2\pi\widehat{x\varphi}(y)$, ou encore $2\pi iy\,\hat{\varphi}(y)=\frac{-2\pi}{2\pi i}\hat{\varphi}'(y)$.
Enfin, on obtient l'équation différentielle suivante $\underline{\hat{\varphi}'(y)-2\pi y\,\hat{\varphi}(y)=0}$ dont sa solution est donnée par $\hat{\varphi}(y)=Ce^{-\pi y^2}$, où $C=\hat{\varphi}(0)=\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi x^2}dx=1$. Alors $\underline{\hat{\varphi}(y)=e^{-\pi y^2}}$.
Donc $\underline{\hat{f}(y)=1/2\left(e^{-\pi(y-a)^2}+e^{-\pi(y+a)^2}\right)}$.

4. On a $\underline{\varphi,\ \hat{\varphi},\ f,\ \hat{f}\in S(\mathbb{R})\subset L^1(\mathbb{R})}$ et comme φ et f <u>sont des fonctions continues</u>, alors d'après le théorème d'inversion, il résulte $\underline{\hat{\hat{\varphi}}(x)=\varphi(-x) \text{ et } \hat{\hat{f}}(x)=f(-x)}$, mais φ et f sont des fonctions <u>paires</u>, alors $\hat{\hat{\varphi}}(x)=\varphi(x)$ et $\hat{\hat{f}}(x)=f(x)$.

Exercice 3 (08 pts)

1. H est un sous-espace vectoriel de $H^1(I)$. On va montrer qu'il est fermé, pour ceci considérons l'application $g : \mathrm{v} \in H^1(I) \mapsto \mathrm{v}(1)$, il est clair que g est linéaire, et continue puisque $|g(\mathrm{v})| = |\mathrm{v}(1)| \leq \|\mathrm{v}\|_\infty \leq \|\mathrm{v}\|_{H^1(I)}$, car $H^1(I) \subset L^\infty(I)$ avec injection continue.

   D'où $Ker\, g = H$ est fermé, donc complet, muni de la norme de $H^1(I)$ induite du produit scalaire et par conséquent H est un espace de Hilbert.

2. Soit $u \in C^2(\overline{I})$ une solution classique de $(\mathcal{P})$. On le multiplie par $\mathrm{v} \in C^1([0,1])$, et en intégrant par parties, on obtient $\int_0^1 u'\mathrm{v}'dx + \int_0^1 u\mathrm{v}dx - u'(1)\mathrm{v}(1) + u'(0)\mathrm{v}(0) = \int_0^1 f\mathrm{v}dx$.

On choisit v telle que v(1)=0, comme $u'(0) = ku(0)$, alors

$$\int_0^1 u'\mathrm{v}'dx + \int_0^1 u\mathrm{v}dx + ku(0)\mathrm{v}(0) = \int_0^1 f\mathrm{v}dx \qquad \forall \mathrm{v} \in C^1([0,1]),\ \mathrm{v}(1)=0.$$

Grâce à la densité de V dans H, on obtient la formulation variationnelle associé au problème $(\mathcal{P})$ suivante

$$u \in H, \qquad \int_0^1 u'\mathrm{v}'dx + \int_0^1 u\mathrm{v}dx + ku(0)\mathrm{v}(0) = \int_0^1 f\mathrm{v}dx \qquad \forall \mathrm{v} \in H.$$

3. Considérons la forme bilinéaire a définie sur $H \times H$ par $a(u,\mathrm{v}) = \int_0^1 u'\mathrm{v}'dx + \int_0^1 u\mathrm{v}dx + ku(0)\mathrm{v}(0)$,

   et la forme linéaire ℓ définie sur H par $\ell(\mathrm{v}) = \int_0^1 f\mathrm{v}\,dx$.

Pour la continuité de a, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz dans $L^2(0,1)$ et on utilise l'injection continue $H^1(0,1) \subset C([0,1])$, on en déduit

$$a(u,\mathrm{v}) = \|u'\|_2\|\mathrm{v}'\|_2 + \|u\|_2\|\mathrm{v}\|_2 + k\,|u(0)\mathrm{v}(0)| \leq \left(\|u'\|_2^2 + \|u\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\|\mathrm{v}'\|_2^2 + \|\mathrm{v}\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} + k\,\|u\|_\infty\|\mathrm{v}\|_\infty$$
$$\leq \|u\|_{H^1(0,1)}\|\mathrm{v}\|_{H^1(0,1)} + k\,\|u\|_{H^1(0,1)}\|\mathrm{v}\|_{H^1(0,1)} = (1+k)\|u\|_{H^1(0,1)}\|\mathrm{v}\|_{H^1(0,1)}.$$

Pour la coercivité de a, on a $a(u,u) = \int_0^1 u'^2dx + \int_0^1 u^2dx + ku(0)^2 \geq \int_0^1 u'^2dx + \int_0^1 u^2dx = \|u\|^2_{H^1(0,1)}$.

Pour la continuité de la forme linéaire ℓ, on a $|\ell(\mathrm{v})| \leq \|f\|_2\|\mathrm{v}\|_2 \leq \|f\|_2\|\mathrm{v}\|_{H^1(0,1)} = C\|\mathrm{v}\|_{H^1(0,1)}$.

En appliquant le théorème de Lax-Milgram, on obtient l'existence d'une solution faible unique $u \in H$.

4. Soit $u \in C^2([0,1]) \cap H$ une solution faible. Alors u vérifie la formulation variationnelle associé au problème $(\mathcal{P})$: $\int_0^1 u'\mathrm{v}'dx + \int_0^1 u\mathrm{v}dx + ku(0)\mathrm{v}(0) = \int_0^1 f\mathrm{v}dx \quad \forall \mathrm{v} \in H$, en choisissant $\mathrm{v} \in C_c^1(0,1)$, il devient

$$\int_0^1 u'\mathrm{v}'dx + \int_0^1 u\mathrm{v}dx = \int_0^1 f\mathrm{v}dx,$$

en intégrant par partie, on obtient $\int_0^1 (-u'' + u)\mathrm{v}\,dx = \int_0^1 f\mathrm{v}\,dx$, ce qui implique que $-u'' + u = f$ p.p. dans I.

On choisit $\mathrm{v} \in C^1(\overline{I})$, v(1)=0 et on intègre le premier terme de la formulation variationnelle par partie,

On obtient : $-\int_0^1 u''\mathrm{v}\,dx + u'(1)\mathrm{v}(1) - u'(0)\mathrm{v}(0) + \int_0^1 u\mathrm{v}\,dx + ku(0)\mathrm{v}(0) = \int_0^1 f\mathrm{v}\,dx$.

Comme $-u'' + u = f$ p.p. dans I, alors on en déduit que $-u'(0)\mathrm{v}(0) + ku(0)\mathrm{v}(0) = 0$, mais $\mathrm{v}(0)$ est quelconque, alors on obtient $u'(0) = ku(0)$. Donc u satisfait le problème $(\mathcal{P})$.

Université Hamma Lakhdar El Oued
Faculté de sciences exactes
Département de Mathématiques

Examen : Espaces Fonctionnels et théorèmes du point fixe

Master Maths 2ème Année
Le 26/01/2026
Durée : 1h 30min

Exercice 1 (05 pts)

On considère l'espace de Hilbert

$$E = \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C}) = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C} \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\}.$$

Soit l'opérateur $T_n : E \to \mathbb{C}$ défini par $T_n(x) = x_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $T_n \in E'$. Calculer $\|T_n\|_{E'}$.
2. Lorsque $n \to +\infty$, montrer que $T_n \xrightarrow{w^*} 0$. Conclure que $T_n \xrightarrow{w} 0$.
3. La suite (T_n) converge-t-elle fortement vers 0 lorsque $n \to +\infty$? Justifier.

Exercice 2 (07 pts)

Soient $a \in \mathbb{R}$ fixé et φ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^{-\pi x^2}$.

1. Montrer que $\varphi \in S(\mathbb{R})$. En déduire que $\varphi \in S(\mathbb{R})$.
2. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \varphi(x)\cos(2\pi a x)$.
   Vérifier que $f \in S(\mathbb{R})$ et que $f(y) = \frac{1}{2}\Big(\varphi(y-a) + \varphi(y+a)\Big), \ \forall y \in \mathbb{R}$.
3. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, calculer $\varphi(y)$. En déduire une expression explicite de $f(y)$.
4. Montrer que $\varphi = \varphi$ et $f = f$.

Exercice 3 (08 pts)

On se donne $f \in L^2(\mathcal{I})$, où $\mathcal{I} = \left]0,1\right[$ et on considère le problème $(\mathcal{P})$ défini par

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -u'' + u = f & \text{dans } \mathcal{I}, \\ u'(0) = ku(0), \ u(1) = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que $H = \left\{ v \in H^1(\mathcal{I}) : v(1) = 0 \right\}$ est un espace de Hilbert.
2. Si $u \in C^2(\bar{\mathcal{I}})$ est une solution classique du problème $(\mathcal{P})$.
   Donner la formulation variationnelle du problème $(\mathcal{P})$.
   (Aide: en acceptant que l'espace $V = \left\{ v \in C^1\left(\bar{\mathcal{I}}\right) : v(1) = 0 \right\}$ est dense dans H)
4. Pour $k \geq 0$, montrer que la formulation variationnelle du problème $(\mathcal{P})$ admet une solution unique $u \in H$.
4. Si la solution faible $u \in C^2(\bar{\mathcal{I}}) \cap H$, montrer qu'elle est solution classique de $(\mathcal{P})$.

Bon courage