جامعة الشهيد حمة الاخضر

قسم الاعلام الالي سنه اولى ماسترالذكاء إلصطناعي وعلم البيانات

مقياس: Math pour l’ingénierie الزمن: ساعة ونصف

امتحان السداسي الاول

التمرين الاول(6ن): لتكن الدالة ذات المتغيرين المعرفة كما يلي :

$$f(x,y)=2y^4+x^2-y^2-2x$$

1- عين مجموعة النقاط الحرجة لهذه الدالة.
2- أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية وكذلك السرجية إن وجدت.

التمرين الثاني (4ن) :لتكن الدالة ذات المتغيرين المعرفة كما يلي :

$$f(x,y)=yx^2+2xcosy$$

1- أحسب كل المشتقات الجزئية من الرتبة الاولى والثانية لهذه الدالة.
2- أوجد نشر تايلورمن المرتبة الثانية لهذه الدالة بجوار النقطة (0,0)

التمرين الثالث(6ن): ليكن الشكل الثنائي الخطي المعرف على R^2 كما يلي

$$u(x,y)=x_1y_1-\frac{3}{2}x_1\,y_2-\frac{3}{2}x_2\,y_1+6x_2\,y_2$$

حيث $x=(x_1\,,x_2)$ $y=(y_1\,,y_2)$

1- هل الشكل الثنائي متناظر؟ برر إجابتك
2- هل يمثل الشكل الثنائي جداء سلمي؟ علل
3- عين المصفوفة المرفقة ل **u** في الاساس القانوني R^2

التمرين الرابع(4ن): لتكن المصفوفة المرفقة للشكل الثنائي الخطي u حيث

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$$

1- عين الشكل الثنائي u ثم أوجد الشكل التربيعي q
2- هل u متناظرة ومعرفة موجبة؟ علل.

أولى ماستر
إعلام آلي

تصحيح الإمتحان

الرياضيات
المهندسين.

التمرين الأول: (06 ن)

$$f(x,y) = 2y^4 + x^2 - y^2 - 2x$$

1 - مجموعة النقاط الحرجة:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 8y^3 - 2y = 0 \end{cases}$$

الثنائيات التي تعدم المشتقات الجزئية الأولى تمثل النقاط الحرجة للدالة f

ومنه:

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \ : \ x = 1 \\ 8y^3 - 2y = 0 \ : \ (y = 0) \vee \left(y = \frac{1}{2}\right) \vee \left(y = -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

مجموعة النقاط الحرجة هي: $\left\{(1,0), \left(1, \frac{1}{2}\right), \left(1, -\frac{1}{2}\right)\right\}$

2 - المصفوفة "هاسيان"

$$H_f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 24y^2 - 2 \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$\det H_f = 48y^2 - 4.$$

* النقطة $(1,0)$:

$$\det H_f(1,0) = -4 < 0$$

إذن $(1,0)$ نقطة سرجية.

* $(1,\frac{1}{2})$ و $(1,-\frac{1}{2})$:

$$\begin{cases} \det H_f(1,-\frac{1}{2}) = \det H_f(1,\frac{1}{2}) = 8 > 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-\frac{1}{2}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,\frac{1}{2}) = 2 > 0 \end{cases}$$

إذن $(1,\frac{1}{2})$ و $(1,-\frac{1}{2})$ قيم محلية صغرى لـ f.

التمرين الثاني: (4ن)

$$f(x,y) = yx^2 + 2x\cos y.$$

-1

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2yx + 2\cos y.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2x\sin y.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x\cos y.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x - 2\sin y \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x - 2\sin y$$

نلاحظ أن:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

2 - نشر تايلور من المرتبة الثانية لـ f عند $(0,0)$:

$$h_1 = x - x_0 = x - 0 = x.$$

$$h_2 = y - y_0 = y - 0 = y.$$

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\cdot x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\cdot y^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\cdot xy\right]$$

$$f(x,y) = 0 + 2x + \frac{1}{2}[\,0\,] = 2x + O(h_1^2 + h_2^2)$$

التمرين الثالث: $(6\,ن)$

1 - الشكل الثنائي الخطي u متناظر لأن:

$$u(y,x) = y_1x_1 - \frac{3}{2}y_2x_1 - \frac{3}{2}y_1x_2 + 6y_2x_2$$

$$= x_1y_1 - \frac{3}{2}x_1y_2 - \frac{3}{2}x_2y_1 + 6x_2y_2$$

$$= u(x,y).$$

2 - يكون u جداء سلمي إذا تحقق:

u متناظر ومعرف موجب أي:

$$\forall (x,x) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : u(x,x) > 0$$

بما أن u متناظر يبقى معرف موجب :

لدينا :

$$u(x,x) = x_1^2 - \frac{3}{2}x_1x_2 - \frac{3}{2}x_2x_1 + 6x_2^2$$

$$u(x,x) = x_1^2 + 6x_2^2 - 3x_1x_2$$

$$u(x,x) = \left(x_1 - \frac{3}{2}x_2\right)^2 + \frac{15}{4}x_2^2 > 0$$

ومنه :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} : u(x,x) > 0$$

إذن u يمثل جداء سلمي.

3- المصفوفة المرفقة :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 6 \end{pmatrix}$$

التمرين الرابع : (4ن) :

1- الشكل الثنائي u :

$$u(x,y) = (x_1, x_2, x_3)\, A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

إذن :

$$u(x,y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_3y_1$$

2- بما أن المصفوفة A متناظرة أي $A^t = A$

فإن u متناظرة أيضا.

معرفة موجبة: لدينا:

الشكل التربيعي q حيث:

$$q(x) = u(x,x) = 2x_1^2 + x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_1 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - x_3x_1$$

أي:

$$u(x,x) = (x_1+x_2)^2 + (x_1-x_3)^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0$$

ومنه:

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} : u(x,x) > 0$$

ومنه u معرفة موجبة.

سلم التنقيط:

س1: 1- (ن2) - 2 (ن4)

س2: 1- (ن2) - 2 (ن2)

س3: 1- (ن2) - 2 (ن2) - 3 (ن2)

س4: 1- (ن2) - 2 (ن2).