

Département de Maths	Université d'El-Oued	Module: Analyse complexe
2 ^{ème} année master	Faculté des Sciences Exactes	Année universitaire: 2025-2026

Corrigé type d'examen

Ex 1:		
1.a)	$\sin(iy) = \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} = \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = i \frac{e^y - e^{-y}}{2} = i \sinh y$	0,5
	$\cos(iy) = \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^{-y} + e^y}{2} = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \cosh y$	0,5
b)	Nous avons, $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - \sin x \cosh y$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 - \cos x \cosh y$ $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y + \cos x \sinh y$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 + \cos x \cosh y$	0,5
	Comme $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ on dit que u est harmonique.	
	Trouvons V le conjugué harmonique de u :	
	c.a.d. $f = u + iV$ est holomorphe et $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$.	
	De que $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x - \sin x \cosh y$ on a $V = 2xy - \sin x \sinh y + c(x)$	0,5
	et $\frac{\partial V}{\partial x} = 2y - \cos x \sinh y + c'(x)$ et comme $\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y - \cos x \sinh y$	
	on a $c'(x) = 0$ c.a.d. $c(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$ et $V = 2xy - \sin x \sinh y + C$	0,5
	Donc $f(x+iy) = (x^2 - y^2 + i2xy) + (\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y) + iC$	0,5
	$= (x + iy)^2 + (\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y) + iC$	0,5
	c.a.d. $f(z) = z^2 + \cos z + iC$, $C \in \mathbb{R}$	0,5
2)	$\mathcal{P}$ est harmonique. Nous avons	
	$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial r} = 3r^2 \cos(3\theta)$ et $\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial r^2} = 6r \cos(3\theta)$	0,5
	$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta} = -3r^3 \sin(3\theta)$ et $\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial \theta^2} = -9r^3 \cos(3\theta)$	0,5
	On a, $r^2 \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial r^2} + r \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial \theta^2} = 6r^3 \cos(3\theta) + 3r^3 \cos(3\theta) - 9r^3 \cos(3\theta) = 0$	0,5
	donc $\mathcal{P}$ est harmonique.	
	Trouvons φ le conjugué harmonique de $\mathcal{P}$:	
	c.a.d. $(\mathcal{P} + i\varphi)$ est holomorphe et $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta}$.	0,5
	De que $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta} = 3r^2 \sin(3\theta)$ on a $\varphi = r^3 \sin(3\theta) + c(\theta)$	0,5
	et $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 3r^3 \cos(3\theta) + c'(\theta)$ et comme $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = r \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial r} = 3r^3 \cos(3\theta)$	
	donc $c'(\theta) = 0$ c.a.d. $c(\theta) = C$, $C \in \mathbb{R}$ et $\varphi = r^3 \sin(3\theta) + C$	0,5
	Comme $\mathcal{Q}(1, 2025\pi) = 2026$ on a $(1)^3 \sin(6075\pi) + C = 2026$	0,5
	c.a.d. $C = 2026$	
	Donc, $\varphi(r, \theta) = r^3 \sin(3\theta) + 2026$	0,5

$$\text{Ex 2: 1) } \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + \pi^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + \pi^2)^2} dx$$

car la fonction $x \mapsto \frac{x \sin x}{(x^2 + \pi^2)^2}$ est paire.

Pour calcul $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + \pi^2)^2} dx$ on calcul $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{(x^2 + \pi^2)^2} dx$.

On considère la fonction $f: z \mapsto \frac{z e^{iz}}{(z^2 + \pi^2)^2}$ et le cercle C est formé du segment $[-R, R]$ et demi-cercle supérieur γ_R de centre O et rayon R .

Il y a deux pôles d'ordre 2 sont $i\pi$ et $-i\pi$.

Pour $R > \pi$, seul $i\pi$ est à l'intérieur de C .

Nous avons, $\oint_C f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\gamma_R} f(z) dz \dots (*)$

et on a $\oint_C f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, i\pi) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i\pi} \frac{d}{dz} ((z - i\pi)^2 f(z))$

$$= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i\pi} \frac{d}{dz} \left(\frac{z e^{iz}}{(z + i\pi)^2} \right) = \frac{e^{-\pi}}{2} i$$

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_0^\pi \frac{e^{it} i R e^{it}}{(e^{2it} + \frac{\pi^2}{R^2})^2} dt \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

Par passage à la limite en $(*)$ lorsque $R \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{e^{-\pi}}{2} i \quad \text{donc} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + \pi^2)^2} dx = \frac{e^{-\pi}}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + \pi^2)^2} dx = \frac{e^{-\pi}}{4}$$

2) On pose $z = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ donc $dt = \frac{dz}{iz}$, $\cos t = \frac{1}{2} (z + \frac{1}{z})$, $\sin t = \frac{1}{2i} (z - \frac{1}{z})$.

$$\text{Nous avons, } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b \cos t + c \sin t} = \frac{1}{\pi} \oint_{|z|=1} \frac{1}{(c + ib)z^2 + 2iaz - c + ib} dz$$

La fonction $f: z \mapsto \frac{1}{(c + ib)z^2 + 2iaz - c + ib}$ admet deux singularités

$$z_1 = i \frac{-a - \sqrt{a^2 - (b^2 + c^2)}}{c + ib}, \quad z_2 = i \frac{-a + \sqrt{a^2 - (b^2 + c^2)}}{c + ib}.$$

Remarquons $|z_2| = \frac{1}{|z_1|}$ avec $|z_1| = \frac{a + \sqrt{a^2 - (b^2 + c^2)}}{\sqrt{c^2 + b^2}}$ et $|z_2| = \frac{a - \sqrt{a^2 - (b^2 + c^2)}}{\sqrt{c^2 + b^2}}$.

On a $|z_1| > 1$ et $|z_2| < 1$ ce qui donne z_2 est à l'intérieur

de $(|z|=1)$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b \cos t + c \sin t} &= \frac{1}{\pi} \times 2\pi i \text{Res}(f, z_2) \\ &= 2i \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2) \frac{1}{(c + ib)(z - z_1)(z - z_2)} \\ &= 2i \frac{1}{2i \sqrt{a^2 - (b^2 + c^2)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - (b^2 + c^2)}} = \frac{\sqrt{a^2 - (b^2 + c^2)}}{a^2 - b^2 - c^2}. \end{aligned}$$

Ex 3:

• Comme la fonction $f: z \mapsto e^z$ est holomorphe, donc

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{n+1}} dz = 2\pi i \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{2\pi i}{n!}.$$

avec $f^{(n)}(0) = 1$

• On pose $z = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ donc $dz = ie^{it} dt$.

Alors,

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{n+1}} dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{it}}}{e^{i(n+1)t}} i e^{it} dt$$

$$= i \int_0^{2\pi} e^{\cos t} e^{i(\sin t - nt)} dt$$

$$= i \int_0^{2\pi} e^{\cos t} (\cos(\sin t - nt) + i \sin(\sin t - nt)) dt$$

$$= - \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \sin(\sin t - nt) dt + i \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t - nt) dt$$

donc

$$-J + iI = \frac{2\pi}{n!} i \quad \text{ce qui implique}$$

$$I = \frac{2\pi}{n!} \quad \text{et} \quad J = 0.$$